Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ingeniería

Escuela de Eléctrica

Actividad Complementaria $N^{\underline{o}}1$

1.- Demostrar que C es un cuerpo.

2.- Demostrar las siguientes propiedades

$$1)\overline{\overline{z}} = z \qquad 2)\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad 3)\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$$

$$4)\,|\overline{z}| = |z| \qquad 5) z\overline{z} = |z|^2 \Rightarrow \begin{cases} z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|} \\ \\ |z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = z^{-1} \end{cases} \qquad 6)\,|zw| = |z|\,|w|$$

$$7)\,\left|z^{-1}\right| = |z|^{-1} \quad 8) w \neq 0 \Rightarrow \overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}; \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{z}{w} \qquad 9) \begin{matrix} |\mathrm{Re}\, z| \leq |z| \\ \\ |\mathrm{Im}\, z| \leq |z| \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -|z| \leq \mathrm{Re}\, z \leq |z| \\ \\ -|z| \leq \mathrm{Im}\, z \leq |z| \end{cases}$$

3.- Representar gráficamente la suma de dos números complejos z_1 y z_2, y deducir que la misma está representada por la diagonal del paralelogramo definido por z_1 y z_2

4.- Calcular las siguientes expresiones:

$$a)\, 3(-1+4i) - 5(7-i) \quad b)\ (3+i)(2-5i) \quad c)\ (1-i)\left[2(1+i) - 3(i-1)\right]$$

$$d)\ \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{3i} \quad e)\ (1-2i)^2\left[\frac{4}{1-i} + \frac{2-i}{1+i}\right] \quad f)\ \frac{i^2+i^7-i^{17}}{5-i^6+i^{10}}$$

5.- Representar los siguientes números complejos en su forma polar:

$$a)\, 1+i \quad b)\ -1+i \quad c)\ -1-i$$

$$d)\, 1+\sqrt{3}i \quad e)\, 4i \quad f)\ \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$$

6.- Representar los siguientes números complejos en su forma binómica:

$a)\, 2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi i}{4}}$ $\quad b)\, 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$ $\quad c)\, 4e^{\frac{\pi i}{4}}$

7.- Calcular las siguientes expresiones:

$$a)\ |2(-2+4i) - 3(1-i)| \quad b)\ \left|(-2+5i)^2 + \overline{(1-i)^2}\right| \quad c)\ \left|\frac{1+3i}{3+i}\right|$$

$$d)\, \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1+i}\right) \quad e)\, \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) \quad f)\, \mathrm{Im}\left(z^3\right)$$

$$g)\, \mathrm{Re}\left[\frac{(1-i)^2}{4+2i}\right]$$

8.- Calcular las siguientes expresiones:

$a)\ \left(\sqrt{3}-i\right)^6 \qquad b)\ (-1+i)^7$

9.- Calcular las siguientes raíces y dar una representación gráfica en cada caso.

$$\begin{array}{ll} a)\ \sqrt{2i} & b)\ \sqrt{2\sqrt{3}-2i} \\ c)\ \sqrt[5]{-4+4i} & d)\ \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}i} \end{array}$$

10.- Resolver la siguiente ecuación

$$z^2+3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z+\frac{7}{4}i=0$$

11.- Usar la fórmula de Moivre para probar la identidad

$$sen^3\,\theta=\frac{3}{4}sen\,\theta-\frac{1}{4}sen\,\theta$$

12.- Describir gráficamente la región del plano representada por cada una de las siguientes expresiones e indicar en cada caso si el conjunto es abierto, cerrado, acotado, conexo.

$a)\ z=(2+i)+t\,(1-3i)\,;t\in\mathbb{R}$ $\quad b)\ \operatorname{Re}z\geq-3$ $\quad c)\ |\arg z|<\frac{\pi}{2}$ $\quad d)\ \operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\leq 0$

$e)\ |z-1+i|=1$ $\quad f)\ |z+i|\leq 3$ $\quad g)\ \operatorname{Re}(\overline{z}-1)=2$ $\quad h)\ |2z+3|>5$

$i)\ 1<|z+i|\geq 2$ $\quad j)\ |z+2i|+|z-2i|=10$ $\quad k)\ |z-3|-|z+3|=4$

13.- Hallar la imagen mediante $f(z)$ y $g(z)$ en los puntos indicados:

$a)\ f(z)=z\,(2-z) \quad z=1\,;\ z=2-2i$

$b)\ g(z)=\frac{1+z}{1-z} \quad z=i\,;\ z=1-i$

14.- Si $f(z)=\frac{2z-1}{3z-1} \quad \left(z\neq\frac{1}{3}\right)$, encontrar:

$$a)\ f(\frac{1}{z}) \qquad b)\ f\left[f\left(z\right)\right]$$

15.- Encontrar el dominio de definición de cada una de las siguientes funciones;

$a)\ f_1\left(z\right)=\frac{1}{z} \qquad b)\ f_2\left(z\right)=\frac{1}{1-|z|}$

$c)\ f_3\left(z\right)=\frac{1}{z^2+1} \quad d)\ f_3\left(z\right)=\frac{z}{z+\overline{z}}$

16.- Separar las partes reales e imaginarias de cada una de las siguientes funciones:

$a)\ f_1\left(z\right)=z^2-3z+3 \quad b)\ f_2\,/z)=\frac{1}{1-z} \quad c)\ f_3\left(z\right)=2z^2-3iz$

$d)\ f_4\left(z\right)=z+\frac{1}{z}$

17.- Dada la función $f(z)=\frac{z+2}{2z-1}$ determina el conjunto de $z\in\mathcal{C}$ cuyas imagenes son:

$a)\ f(z)=i \qquad b)\ f(z)=z$

$c)\ f(z)=2-3i \quad d)\ f(z)=\frac{4-8i}{5}$

18.- Probar que

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\operatorname{Re}z-\operatorname{Re}z_0}{z-z_0}$$

no existe en punto alguno z_0.

19.- Probar que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z}-\overline{z}_0}{z-z_0}$$

no existe en punto alguno z_0

20.-Calcular los siguentes límites:

$a)\ \lim_{z\to 2i}(2z^3-3z^2+z+i)$ $\quad b)\ \lim_{z\to 2i}\frac{1-z}{1+z}$ $\quad c)\ \lim_{z\to e^{\pi i/4}}\frac{z^2}{z^4+z+1}$ $\quad d)\ \lim_{z\to 2+i}\frac{z^2-2iz}{z^2+4}$

$e)\ \lim_{z\to 2i}\frac{z^2-2iz}{z^2+4}$ $\quad f)\ \lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^6+1}$ $\quad g)\ \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^3+i}$ $\quad h)\ \lim_{z\to i}\frac{1}{1+z^2}$

$i)\ \lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)^2}$ $\quad j)\ \lim_{z\to\infty} 3z^2$

21.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados;

$$a)\ f(z)=\begin{cases}\frac{3z^2-5iz+2}{z^2+iz+6}, & \text{si} z\neq 2i\\ & \qquad\qquad \text{en } z=2i\\ \frac{7}{5}, & \text{si } z=2i\end{cases}$$

$$b)\ g(z)=\begin{cases}\frac{z^2+z+1-i}{z^2-2z+2}, & \text{si} z\neq 1+i\\ & \qquad\qquad \text{en } z=1+i\\ 1-\frac{1}{2}i, & \text{si } z=1+i\end{cases}$$

22.- Demostrar que las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en todo el plano complejo;

$$a)\ f(z)=\begin{cases}\frac{z^2+4}{z-2i}, & \text{si } z\neq 2i\\ 4i, & \text{si } z=2i\end{cases}\qquad b)\ g(z)=\begin{cases}\frac{z^2+1}{z+i}, & \text{si } z\neq -i\\ -2i, & \text{si } z=-i\end{cases}$$

23.- Encontrar los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones, y redefinir las funciones donde esto sea posible:

$a)\ f_1(z)=\frac{1}{z-i}$ $\quad b)\ f_2(z)=\frac{z-1}{z^2-1}$

$c)\ f_3(z)=\frac{z-1}{z^2-3z+2}$ $\quad d)\ f_4(z)=\frac{z}{z^2}+1$

24.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en el origen:

$$a)\ f(z)=\begin{cases}\frac{\mathrm{Re}\left(z^2\right)}{|z|^2}, & \text{si } z\neq 0\\ 0, & \text{si } z=0\end{cases}\qquad b)\ g(z)=\begin{cases}\frac{(\mathrm{Re})^2}{|z|}, & \text{si } z\neq 0\\ 0, & \text{si } z=0\end{cases}$$