Ejercicios Propuestos del Tema 1

1. Localizar vectorialmente los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ cuando

(a) $z_1 = \frac{1}{i}$, $z_2 = \frac{1-i}{1-3i}$;

(b) $z_1 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$, $z_2 = \frac{2}{1-3i}$.

2. Verifique cada una de las siguientes identidades.

(a) $\overline{z_1 z_2} = (\overline{z_1})(\overline{z_2})$.

(b) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

(c) $|\overline{z_1}| = |z_1|$.

3. Verifique cada una de las siguientes identidades.

(a) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

(b) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

4. Si z es un número complejo tal que $|z| = 1$, calcular $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

5. Demostrar que el punto que representa $(z_1 + z_2)/2$ es el punto medio del segmento de recta que une los puntos z_1 y z_2.

6. Demostrar que $\left|(2\overline{z} + 5)(\sqrt{2} - i)\right| = \sqrt{3}\,|2z + 5|$.

7. Dibujar en cada caso el conjunto de puntos que están determinados por las siguientes condiciones:

(a) $|z - \pi i| = \frac{1}{2}$;

(b) $\mathrm{Re}\,(\overline{z} - 1/i) = 1$;

(c) $\left|z + \frac{i}{2}\right| \geq 1$;

(d) $|z - 2i| \leq |z - i|$;

(e) $|z| \geq \mathrm{Re}\, z + 2$;

(f) $|z - 1| < \mathrm{Im}\, z$.

8. Comprobar que si $|z_2| \neq |z_3|$, se cumple

$$\left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}.$$

9. Si R es una constante positiva y z_0 un número complejo fijo, demostrar que la ecuación de una circunferencia de radio R, con centro en $-z_0$ se puede escribir como

$$|z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\overline{z}_0 z) + |z_0|^2 = R^2.$$

10. Muestre que si $\operatorname{Im} z > 0$, entonces $\operatorname{Im}(1/z) < 0$.

11. Suponga que $z_1 + z_2$ y $z_1 z_2$ son, ambos, números reales negativos. Pruebe que z_1 y z_2 deben ser reales.

12. En su libro *Ars Magna*, Girolamo Cardano incluyó un método para encontrar las raíces de la ecuación cúbica general

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

que había sido descubierto por Niccoló Tartaglia. Muestre que la sustitución $w = z + p/3$ reduce la ecuación cúbica general a una ecuación de la forma

$$w^3 + aw + b = 0.$$

13. Encontrar un valor de $\arg z$ cuando

(a) $z = \frac{1}{1-2i\sqrt{3}}$;

(b) $z = \frac{i}{i-2}$;

(c) $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^6$.

14. Aplicar la forma polar para demostrar que

(a) $i\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} + i\right) = 2 + i2\sqrt{3}$;

(b) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{-10} = 2^{-11}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$;

(c) $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$.

15. Encontrar en cada caso, todas las raíces y demostrarlo geométricamente:

(a) $(2i)^{1/2}$;

(b) $8^{1/6}$;

(c) $(1 + i)^{1/3}$;

(d) $(-i)^{1/4}$;

(e) $(-1)^{1/5}$.

16. Si $z_1 z_2 \neq 0$, aplicar la forma polar para demostrar que $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z}_2) = |z_1||z_2|$ si y sólo si $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, donde $\theta_1 = \arg z_1$ y $\theta_2 = \arg z_2$.

17. Resuelva las siguientes ecuaciones.

(a) $z^2 - i = -1$.

(c) $z^3 - i = -\sqrt{3}$.

18. Demuestre que ambos valores de $\sqrt{z^2 - 1}$ se encuentran sobre la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la bisectriz del ángulo interior del triángulo con vértices en los puntos -1, 1 y z, trazada por el vértice z.

19. Establecer la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \qquad z \neq 1$$

y establecer luego la *identidad trigonométrica de Lagrange,*

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left[(n+1)\frac{1}{2}\theta\right]}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}, \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

20. Demostrar que si z es cualquier raíz n-ésima de la unidad, diferente de uno, se cumple $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$.

21. Comprobar que la fórmula cuadrática común es solución de la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$, cuando los coeficientes a, b y c, son números complejos.

22. Clasifique los conjuntos de acuerdo a los términos abierto, cerrado, acotado y conexo.

(a) $|z + i| > 2$.

(b) $|\operatorname{Re} z| > 1$.

(c) $|\operatorname{Im} z| < 1$.

(d) $0 < |z - i + 1| < 1$.

(e) $|z + 1| + |z + i| \geq 2$.

(f) $|z| \geq \operatorname{Re} z - 1$.

(g) $|z - 1| < \operatorname{Im} z$.

(h) $||z - i| - |z + i|| < 1$.

23. Determinar los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos.

(a) $z_n = i^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

(b) $z_n = (1/n)i^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

(c) $|z| > 1$, $0 \leq \arg z < \pi/2$.

(d) $z_n = (-1)^n(1 + i)(n - 1)/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

••