Ejercicios Propuestos del Tema 10

1. Suponga que la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ es $X(s) = \dfrac{1}{s+2}$. Encuentre la transformada de Laplace de cada una de las siguientes señales.

(a) $\int_0^\infty x(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$.

(b) $\dfrac{dx(t)}{dt}$.

(c) $x(t-3)u(t-3)$.

(d) $x(5t)$.

2. Encuentre la transformada de Laplace de la siguientes señales.

(a) $x(t) = p_{1/2}\left(\frac{t-10}{\lambda}\right)$.

(b) $x(t) = e^{2t}u(t) - \left(e^{-3t}\text{sen}\,(30t)\right)u(t)$.

(c) $x(t) = \left(e^{4t}\cos(2t)\right)u(t)$.

(d) $x(t) = e^{at}\left[u(t) - u(t-T)\right]$.

(e) $x(t) = \left(e^{3t} - e^{-4t}\right)u(t)$.

3. Determine la transformada unilateral de Laplace de cada una de las siguientes señales, y especifique las regiones de convergencia correspondientes.

(a) $x(t) = e^{-2t}$.

(b) $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t) + e^{-t}u(-t)$.

(c) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-4t}u(t)$.

4. Determine los valores de los números finitos A y t_0 tales que la transformada de Laplace, $G(s)$, de

$$g(t) = Ae^{-5t}u(t-t_0)$$

tenga la misma forma algebraica que $X(s)$. ¿Cuál es la región de convergencia correspondiente a $G(s)$?

5. Considere la señal

$$x(t) = e^{-5t}u(t) + e^{-\beta t}u(tt)$$

y señale su transformada de Laplace con $X(s)$. ¿Qué restricciones deben imponerse sobre las partes real e imaginaria de β, para que la región de convergencia de $X(s)$ sea $\text{Re}\,s > -3/2$?

6. Sea $g(t) = x(t) + \alpha x(-t)$, donde $x(t) = \beta e^{-t}u(t)$ y la transformada de Laplace de $g(t)$ es:

$$G(s) = \frac{s}{s^2-1}, \qquad -1 < \text{Re}\,s < 1.$$

Determine los valores de las constantes α y β.

7. Demuestre que si $x(t)$ es una función par, entonces $X(s) = X(-s)$.

8. Demuestre que si $x(t)$ es una función impar, entonces $X(s) = -X(-s)$.

9. Determine la señal $x(t)$, para cada una de las siguientes transformadas de Laplace y sus regiones de convergencia asociadas.

(a) $\dfrac{1}{s^2 + a}$, $\operatorname{Re} s > 0$.

(b) $\dfrac{s}{s^2 + a}$, $\operatorname{Re} s < 0$.

(c) $\dfrac{s+1}{(s+1)^2 + a}$, $\operatorname{Re} s < -1$.

(d) $\dfrac{s+2}{s^2 + 7s + 12}$, $-4 < \operatorname{Re} s < -3$.

(e) $\dfrac{s^3 + 4s^2 + s - 1}{(s-1)s^3(s+1)^2}$, $-1 < \operatorname{Re} s < 0$.

10. Para cada una de las señales dadas, encuentre la transformad de Fourier a partir de la transformada de Laplace, si es posible. Si lo anterior no es posible, dé la razón de ello.

(a) $X(s) = \dfrac{s^2 + 2}{(s-1)(s^2 + s + 2)}$.

(b) $X(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)(s+5)}$.

(c) $x(t) = te^{-3t}u(t)$.

(d) $x(t) = e^{3t}u(t)$.

(e) $x(t) = \operatorname{sen}(t)\operatorname{sgn}(t)$.

(f) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dfrac{3}{\pi k^2} e^{j2\pi kt}$.

(g) $x(t) = r_1(t)$.

(h) $x(t) = e^{-6t}\operatorname{sen}(6\pi t)u(t)$.

11. Considere la señal cuya transformada de Laplace está dada por

$$X(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

(a) ¿Para qué valores de ξ, $-1 \leq \xi \leq 1$, se puede calcular la transformada de Fourier a partir de la transformada de Laplace?

(b) Para estos valores de ξ, ¿cuál es la transformada de Fourier?