

Ejercicios Propuestos del Tema 11

1. Determine la transformada z , con su ROC, de las siguientes señales y dibuje los correspondientes diagramas de polos y ceros.

(a) $x(n) = (1 + n)u(n)$.

(b) $x(n) = (a^n + a^{-n})u(n)$, a real.

(c) $x(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n)$.

(d) $x(n) = (na^n \text{sen } \omega_0 n)u(n)$.

(e) $x(n) = (na^n \text{cos } \omega_0 n)u(n)$.

(f) $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n < 0. \end{cases}$

(g) $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$

(h) $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{cos}\left(\frac{\pi}{4}n\right), & n \leq 0 \\ 0, & n > 0. \end{cases}$

2. Calcule la convolución $x_1(n) * x_2(n)$ de las siguientes señales por medio de la transformada z .

(a) $x_1(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n < 0 \end{cases}$, $x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$.

(b) $x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n-1)$, $x_2(n) = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$.

(c) $x_1(n) = u(n)$, $x_2(n) = \delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$.

(d) $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $x_2(n) = \text{cos}(\pi n)u(n)$.

(e) $x_1(n) = nu(n)$, $x_2(n) = 2^n u(n-1)$.

3. Valiéndose de la expansión en fracciones parciales, determine la transformada inversa z de

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2(1 + 2z^{-1})}, \quad |z| > 2.$$

4. Considere al siguiente expresión algebraica para la transformada z , $X(z)$, de una señal $x(n)$:

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}.$$

- (a) Suponiendo que la ROC es $|z| > 1/3$, exprese a $X(z)$ en una serie de potencias para determinar los valores de $x(0)$, $x(1)$ y $x(2)$.

- (b) Suponiendo que la ROC es $|z| < 1/3$, exprese a $X(z)$ en una serie de potencias para determinar los valores de $x(0)$, $x(-1)$ y $x(-2)$.

5. Determine la transformada inversa z de

$$X(z) = \frac{1}{1.024} \left(\frac{1.024 - z^{-10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \right), \quad |z| > 0.$$

6. Considere las siguientes dos señales:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n+1) \quad y \quad x_2(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n).$$

Sean $\mathcal{X}_1(z)$ y $X_1(z)$ respectivamente las transformadas z unilateral y bilateral de $x_1(n)$ y sean $\mathcal{X}_2(z)$ y $X_2(z)$ respectivamente las transformadas z unilateral y bilateral de $x_2(n)$.

- (a) Tome la transformada z bilateral inversa de $X_1(z)X_2(z)$ para determinar $g(n) = x_1(n) * x_2(n)$.
- (b) Tome la transformada z unilateral inversa de $\mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z)$ para obtener una señal $q(n)$ para $n \geq 0$. Observe que $g(n)$ y $q(n)$ no son idénticas para $n \geq 0$.
7. Se dice que una señal $x(n)$ es causal si $x(n) = 0$ para todo $n < 0$. Determine la señal causal $x(n)$ si su transformada z , $X(z)$, está dada por:

(a) $X(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}};$

(b) $X(z) = \frac{1}{1 - z - 1 + \frac{1}{2}z^{-2}};$

(c) $X(z) = \frac{z^{-6} + z^{-7}}{1 - z^{-1}};$

(d) $X(z) = \frac{1 + 2z^{-2}}{1 + z^{-2}};$

(e) $X(z) = \frac{1}{4} \frac{1 + 6z^{-1} + z^{-2}}{(1 - 2z^{-1} + 2z^{-2})(1 - 0.5z^{-1})};$

(f) $X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}}.$

8. Determine todas las posibles señales $x(n)$ asociadas con la transformada z

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(3 - z^{-1})}.$$

9. Derivando $X(z)$ y usando después las propiedades pertinentes de la transformada z , determine $x(n)$ para las siguientes transformadas.

(a) $X(z) = \log(1 - 2z), |z| < \frac{1}{2}.$

(b) $X(z) = \log(1 - z^{-1}), |z| > \frac{1}{2}.$

10. Sea $x(n), 0 \leq n < N - 1$ una secuencia de duración finita que es real y par. Demuestre que los ceros del polinomio $X(z)$ aparecen en pares que son imágenes especulares con respecto a la circunferencia unidad, esto es, si $z = re^{j\theta}$ es un cero de $X(z)$, entonces $z = (1/r)e^{j\theta}$ también lo es.