

Ejercicios Propuestos del Tema 2

1. Describir el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones.

(a) $f(z) = \frac{1-z}{z^3 + iz^2 + 3z - i};$

(b) $f(z) = \frac{1}{2 - (z-i)^2};$

(c) $f(z) = \text{Arg}(1/z);$

(d) $f(z) = \frac{|z|^2 - 1}{|z + i|}.$

2. Escribir las siguientes funciones $f(z)$ en la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

(a) $f(z) = iz^4 + \sqrt{2}z^3 + (1-i)z^2 - 1;$

(b) $f(z) = \frac{z}{z - \bar{z}};$

(c) $f(z) = \frac{z-i}{z^2+1}.$

3. Determinar si cada una de las siguientes funciones son continuas en el círculo ($|z| < 1$). (Justifique su respuesta).

(a) $f(z) = \frac{1}{1-z};$

(b) $f(z) = \frac{1}{1+z^2};$

(c) $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-1/2)}.$

4. Aplicar directamente la definición de derivada para demostrar que $f'(z) = -1/z^2$ cuando $f(z) = 1/z$, siempre que $z \neq 0$.

5. Aplicar la definición de derivada para demostrar que las siguientes funciones no son diferenciables en lugar alguno del plano complejo.

(a) $f(z) = \text{Re } z;$

(b) $f(z) = \bar{z}.$

6. Si u y v se expresan en términos de las coordenadas polares (r, θ) , muestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden escribirse en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \neq 0.$$

7. Pruebe que cada una de las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.



- (a) $f(z) = e^x (-\operatorname{sen} y + i \cos y)$;
- (b) $f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$;
- (c) $f(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$;
- (d) $f(z) = e^{x^2 - y^2} (\cos^2 xy + i \operatorname{sen}^2 xy)$.
8. Utilizando las condiciones necesarias y suficientes para la analiticidad, demostrar que $f'(z)$ no existe en punto alguno del plano complejo si $f(z)$ es:
- (a) \bar{z} ;
- (b) $z - \bar{z}$;
- (c) $2x + ixy^2$;
- (d) $e^x e^{-iy}$.
9. Halle los valores que deben tomar las constantes a , b y c para que la función $f(z)$ sea analítica:
- (a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$;
- (b) $f(z) = \cos x (\cosh y + a \operatorname{senh} y) + i \operatorname{sen} x (\cosh y + b \operatorname{senh} y)$.
10. Si $f(z) = u + iv$ y $\bar{f}(z) = u - iv$ son analíticas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$, pruebe que f es constante en D .
11. Comprobar que cada una de las siguientes funciones son enteras:
- (a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$;
- (b) $f(z) = e^{-y} e^{ix}$;
- (c) $f(z) = (z^2 - 2) e^{-z}$;
- (d) $f(z) = \operatorname{sen}(x^2 - y^2) \cosh(2xy) + i \cos(x^2 - y^2) \operatorname{senh}(2xy)$.
12. Para cada una de las siguientes funciones, determinar los puntos singulares y especificar por qué es analítica en todo punto excepto en los puntos singulares.
- (a) $f(z) = \frac{2z + 1}{z(z^2 + 1)}$;
- (b) $f(z) = \frac{z^3 + i}{z^4 + (1 - 2i)z^3 - (2 + i)z^2 + (2i - 1)z + (1 + i)}$;
- (c) $f(z) = \frac{1}{(z + 2)(z^2 + iz - \pi)}$;
- (d) $f(z) = \frac{z^4}{1 + z^4}$;
13. Suponga que la función analítica f definida en la región R , toma valores reales. Pruebe que f es constante en R .
14. Si $z = x + iy$, muestre que no existe una función entera $f(z)$ cuya derivada sea $f'(z) = x$.
15. Halle la función analítica $f(z) = u + iv$ a partir de su parte real o imaginaria dada.

(a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$.

(b) $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$.

(c) $v(x, y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{(x^2 + y^2)}$.

(d) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

