Ejercicios Propuestos del Tema 5

Para cada una de las siguientes series, determine su región y radio de convergencia.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

Sin obtener la serie correspondiente, determine el centro y el radio del círculo dentro del cual la serie de Taylor indicada converge a la función dada.

6. $\frac{1}{z^4+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$.

7. $\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1-i)^n$.

8. $\frac{1}{z^4+z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$.

9. $\frac{1}{1-\tan z}$ desarrollada alrededor de $1+2i$.

10. $\tanh z$ desarrollada alrededor de $z = i$.

Halle el desarrollo de Taylor, alrededor de z_0, de las siguientes funciones y determine dónde es válido.

11. $f(z) = \cosh z$, $z_0 = 0$.

12. $f(z) = \frac{z}{z+2}$, $z_0 = 1$.

13. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$, $z_0 = -1$.

14. $f(z) = \frac{1}{az+b}$ $(b \neq 0)$, $z_0 = 0$.

15. $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$, $z_0 = 1$.

16. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-2)(z+1)}$, $z_0 = 0$.

17. $f(z) = \operatorname{sen}(2z - z^2)$, $z_0 = 1$.

18. Supongamos que desarrollamos una función $f(z)$ en serie de Taylor alrededor de z_0. En ciertos casos, el círculo centrado en z_0 dentro del cual la serie converge es mayor que el círculo dentro del cual la serie converge a $f(z)$, si bien dichos círculos son concéntricos. Estudiaremos esta posibilidad mediante un caso particular.

(a) Sea $f(z) = \operatorname{Log} z$. Así pues, $f(z)$ se define por medio del corte $y = 0$, $x \le 0$. Demuestre que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + 1 - i)^n,$$

donde

$$a_0 = \ln\sqrt{2} + \frac{i3\pi}{4} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1} e^{-i(3\pi/4)n}}{n\left(\sqrt{2}\right)^n}, \qquad n \neq 0.$$

(b) ¿Cuál es el radio del mayor círculo centrado en $-1 + i$ dentro del cual la serie del apartado (a) converge a $f(z)$?

Sugerencia: Trace el corte indicado en el apartado (a).

(c) Use el criterio del cociente para demostrar que la serie del apartado (a) converge en $|z - (-1 + i)| < \sqrt{2}$ y diverge fuera de este círculo. Compare este círculo con el del apartado (b).

Halle el desarrollo de Laurent de las siguientes funciones, alrededor de cada uno de sus puntos singulares y determine dónde es válido.

19. $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$.

20. $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$.

21. $f(z) = z^2 e^{1/z}$.

22. $f(z) = \cos\left[\dfrac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}\right]$.

23. $f(z) = z^2 \operatorname{sen}\left[\dfrac{1}{z-1}\right]$.

Obtenga los desarrollos de $1/(z+2)$ en serie de Laurent que se indican. Proporcione una expresión para el n-ésimo témino de la serie.

24. Desarrollo válido para $|z| > 2$.

25. Desarrollo válido para $|z + 1| > 1$.

Desarrolle las siguientes funciones en serie de Laurent en un dominio de radio exterior infinito. Determine el centro y el radio interior del dominio. Proporcione una expresión para el n-ésimo témino de la serie.

26. $1/(z-1)$ en potencias de $z+3$.

27. $1/(z+2)$ en potencias de $z-i$.

28. $z/(z-i)$ en potencias de $z-1$.

En los siguientes casos determine cuál es la serie de Laurent que es válida en un dominio anular que contiene al punto $z = 2+2i$. El centro del dominio es el punto $z = 1$. Determine el dominio de validez de cada serie y proporcione una fórmula explícita para el n-ésimo término de la serie.

29. $f(z) = 1/\left[z(z-2)\right]$.

30. $f(z) = 1/\left[z(z-4)\right]$.

31. $f(z) = 1/\left[(z-1)(z-3)\right]$.

32. $f(z) = \dfrac{z-i}{z-1}$.

33. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3} + \dfrac{1}{z}$.

34. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^3} + z^3$.