Ejercicios Propuestos del Tema 6

Halle los puntos singulares de las funciones y analice la naturaleza de los mismos.

1. $f(z) = \dfrac{z^4}{1+z^4}$.

2. $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$.

3. $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$.

4. $f(z) = \operatorname{sen}\left[\dfrac{1}{1-z}\right]$.

5. $f(z) = \dfrac{(z-2)z^7}{(z^2-4)^2}$.

Para las siguientes funciones, calcule el residuo en cada uno de sus puntos singulares aislados.

6. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)}$.

7. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} 2z}{(z+1)^3}$.

8. $f(z) = z^3 \cos\left[\dfrac{1}{z-2}\right]$.

9. $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$.

10. $f(z) = z^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ (n es un número entero).

Utilice el Teorema de los Residuos para calcular las siguientes integrales.

11. $\int\limits_C \dfrac{dz}{z^4+1}$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=2x$.

12. $\int\limits_C \dfrac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, donde C es la circunferencia $|z-2| = \frac{1}{2}$.

13. $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right) dz$, donde C es la circunferencia $|z| = r$.

14. $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^n e^{(2/z)}\, dz$, donde n es un número entero y C es la circunferencia $|z| = r$.

15. Pruebe, mediante el cálculo de residuos, que si $n \geq 1$ es un entero, entonces

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^n dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i n!}{\left(\dfrac{n-1}{2}\right)!\left(\dfrac{n+1}{2}\right)!} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par,} \end{cases}$$

donde C es un contorno cerrado simple cualquiera que contenga el origen.

Sugerencia: Emplee el teorema del binomio.