

Ejercicios Propuestos del Tema 7

1. Demostrar que la transformación $w = iz + i$ mapea el semiplano $x > 0$ sobre el semiplano $v > 1$.
2. Encontrar la región sobre la cual se mapea el semiplano $y > 0$ por medio de la transformación $w = (1 + i)z$: (a) utilizando coordenadas polares; (b) utilizando coordenadas cartesianas. Trazar la gráfica de la región en cada caso.
3. Encontrar la imagen de la región $y > 1$ bajo la transformación $w = (1 - i)z$.
4. Demostrar que si $c_1 < 0$, la imagen del semiplano $x < c_1$ bajo la transformación $w = 1/z$ es el interior de un círculo. ¿Cuál es la imagen cuando $c_1 = 0$?
5. Demostrar que la imagen del semiplano $y > c_2$ bajo la transformación $w = 1/z$ es el interior de un círculo, siempre y cuando $c_2 > 0$. Encontrar la imagen cuando $c_2 < 0$; también cuando $c_2 = 0$.
6. Encuentre la transformación de Möbius que mapea los puntos $-1, i, 1 + i$, respectivamente, en los puntos:
 - (a) $0, 1, \infty$;
 - (b) $0, 1, i$.
7. Demostrar que una composición de dos transformaciones de Möbius es a su vez una transformación de Möbius.
8. Un punto fijo de una transformación $w = f(z)$ es un punto z_0 tal que $z_0 = f(z_0)$. Encontrar los puntos fijos de las transformaciones:
 - (a) $w = \frac{z + 1}{z - 1}$;
 - (b) $w = \frac{z}{6z - 9}$.
9. Demostrar que la transformación de Möbius

$$w = e^{i\alpha} \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right),$$

donde α es cualquier constante real y z_0 es un número complejo tal que $\text{Im } z_0 > 0$, mapea el semiplano superior $\text{Im } z \geq 0$ sobre el disco unitario $|w| \leq 1$.

10. Demostrar que la transformación de Möbius

$$w = e^{i\alpha} \left(\frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1} \right),$$

donde α es cualquier constante real y z_0 es un número complejo tal que $|z_0| \leq 1$, mapea el disco $|z| \leq 1$ sobre el disco $|w| \leq 1$.



Encuentre el transformado del conjunto D dado por

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \\ x - 2y \geq -3 \\ x + y \geq 6 \end{cases}$$

bajo las siguientes transformaciones (ejercicios 11-14).

11. $w = \frac{1-z}{i+z}$.

12. $w = \frac{z}{z-i}$.

13. $w = \frac{i-z}{i+z}$.

14. La transformación $w = \frac{az+b}{cz+d}$ que mapea los puntos $-1, i, 1+i$, respectivamente, en los puntos $2, 4, 3$.

