Tema 1. Números Complejos

Prof. William La Cruz Bastidas

27 de septiembre de 2002

Capítulo 1

Números Complejos

Definición 1.1 *Un número complejo, z, es un número que se expresa como $z = x + iy$ o, de manera equivalente, $z = x+yi$, donde $x \in \Re$ e $y \in \Re$. Se conoce a i como* **la unidad imaginaria***, además, $i^2 = -1$.*

Se denotará con $x = \operatorname{Re} z$ la parte real del número z y con $y = \operatorname{Im} z$ la parte imaginaria de z. Los números complejos de la forma $z = x + i0$ se denominan **reales puros** *o, simplemente,* **reales***; y los números complejos de la forma $z = 0 + iy$ se denominan* **imaginarios puros***.*

Decimos que dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. En otras palabras, si

$$z = a + ib, \qquad w = c + id,$$

y

$$z = w,$$

entonces

$$a = c, \qquad b = d.$$

No existe relación de orden *en los números complejos; de lo contrario, las conocidas relaciones de orden que se usan en el caso de los números reales no son válidas. Usando números reales podemos decir, por ejemplo, que $5 > 3$; pero no tiene sentido afirmar que $1 + i < 2 + 3i$.*

1.1 Operaciones algebraicas

Podemos sumar,restar, multiplicar y dividir números complejos obteniendo como resultado otro número complejo. Sean $z_1 = a + ib$ y $z_2 = c + id$ números complejos.

La *suma* de los números complejos z_1 y z_2 se define como:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d).$$

La *resta* de los números complejos z_1 y z_2 se define como:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d).$$

La *multiplicación* de los números complejos z_1 y z_2 se define como:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

La *división* de los números complejos z_1 y $z_2 \neq 0$ se define como:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

1.2 Representación geométrica

Se puede establecer una correspondencia uno a uno entre cada número complejo $z = x + iy$ y el punto (x, y) del plano cartesiano xy. De esta forma, cada número complejo se puede representar geométricamente como un punto en el plano cartesiano. Cada vez que utilicemos el plano para representar un número complejo lo denominaremos **plano complejo** o **plano** z. En estas circunstancias, el eje x, o eje horizontal, se llama **eje de los números reales**, mientras que el eje y, o eje vertical, se conoce como **eje de los números imaginarios**.

Otra representación posible de z en este plano es en forma de vector. Mostramos a $z = x + iy$ como una línea dirigida que comienza en el origen del plano y termina en el punto (x, y). Así, podemos representar un número complejo como un punto o como un vector en el plano xy.

1.3 Valos absoluto y conjugado

Definición 1.2 *Se define el* **valor absoluto** *del número complejo $z = x + iy$, denotado por $|z|$, como*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definición 1.3 *Se define el* **conjugado** *del número complejo $z = x + iy$, denotado por $\overline{z}$, como*

$$\overline{z} = x - iy.$$

1.3.1 Propiedades de la conjugación

Sean z_1 y z_2 números complejos. La siguientes identidas son ciertas.

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.
4. $\overline{z_1 z_2} = (\overline{z_1})(\overline{z_2})$.
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(\overline{z_1})}{(\overline{z_2})}$.
6. $|\overline{z_1}| = |z_1|$.

La siguiente proposición establece una relación entre el módulo y el conjugado de un número complejo.

Proposición 1.1 *Si $z = x + iy$, entonces*

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (x+iy)(x-iy) \\ &= (x^2+y^2)+i(yx-xy) \\ &= x^2+y^2 \\ &= |z|^2 . \end{aligned}$$

□

1.3.2 Propiedades del valor absoluto

Sean z_1 y z_2 números complejos. Las siguientes identidas son ciertas.

1. $|z| \geq |\mathrm{Re}\, z| \geq \mathrm{Re}\, z$.
2. $|z| \geq |\mathrm{Im}\, z| \geq \mathrm{Im}\, z$.
3. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

1.3.3 Desigualdad Triangular

El proceso de sumar el número complejo $z_1 = x_1 + iy_1$ al número complejo $z_2 = x_2 + iy_2$ tiene una interpretación simple en términos vectoriales. El vector que representa la suma de los números complejos z_1 y z_2 se obtiene sumando vectorialmente los vectores de z_1 y z_2; es decir, empleando la regla del paralelogramo. La desigualdad triangular se puede obtener a partir de este esquema geométrico. La longitud de un lado cualquiera de un triángulo es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros lados. La longitud correspondiente a $z_1 + z_2$ es $|z_1 + z_2|$, que debe ser menor o igual que la suma de las longitudes, $|z_1| + |z_2|$.

Proposición 1.2 (Desigualdad Triangular) *Si z_1 y z_2 son números complejos, entonces*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| . \tag{1.1}$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\,\overline{(z_1+z_2)} \\ &= (z_1+z_2)\,(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 , \end{aligned}$$

pero

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\mathrm{Re}\ (z_1\overline{z_2}) \leq 2\,|z_1\overline{z_2}| = 2\,|z_1|\,|\overline{z_2}| = 2\,|z_1|\,|z_2| ,$$

luego

$$|z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 ,$$

de donde se deduce que

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

con lo cual queda establecida la desigualdad triangular. □

La siguiente proposición es la generalización de la desigualdad triangular. En esta proposición se indica que la desigualdad triangular se cumple para un número finito de números complejos.

Proposición 1.3 (Desigualdad Triangular Generalizada) *Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ($n \ge 2$), son números complejos, entonces*

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|. \tag{1.2}$$

Demostración. Realicemos la demostración por inducción. De la Proposición 1.2 se tiene que la desigualdad (1.2) se cumple para $n = 2$. Supongamos que la desigualdad (1.2) se satisface para un entero $n = k > 2$, es decir,

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_k| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_k|. \tag{1.3}$$

Ahora veamos que la desigualdad (1.2) se satisface para un entero $n = k+1$. Como $z_1+z_2+\cdots+z_k$ es un número complejo, entonces de la Proposición 1.2 se concluye que

$$|(z_1 + z_2 + \cdots + z_k) + z_{k+1}| \le |z_1 + z_2 + \cdots + z_k| + |z_{k+1}|. \tag{1.4}$$

De las desigualdades (1.3) y (1.4) se deduce

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_k + z_{k+1}| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}|,$$

para todo entero $k > 2$. Con esto se concluye la prueba de la proposición. □

1.4 Coordenadas polares

El número complejo $z = x + iy \neq 0$ está representado en coordenadas cartesianas por el par ordenado (x, y). Este número complejo también se puede sepresentar en el plano con las llamadas coordenadas polares (r, θ), donde $r = |z|$ y θ es el *argumento* de z.

Definición 1.4 *Para cualquier número complejo $z \neq 0$, el* **argumento** *de z, denotado por $\arg z$, es el águlo, medido en radianes, que forma z con la parte positiva del eje real. Por lo tanto, tiene un valor cualquiera de una cantidad infinita de valores reales que difieren entre sí en múltiplos enteros de 2π. Estos valores se pueden encontrar a partir de la ecuación*

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

El **argumento principal** *de z o* **valor principal** *de $\arg z$, denotado por $\operatorname{Arg} z$, se define como el único valor de $\arg z$ tal que*

$$-\pi < \arg z \le \pi.$$

Identidades entre argumentos

Sean z_1 y z_2 dos números complejos distintos de cero. Las siguientes identidades son ciertas.

1. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.
2. $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Forma polar de un número complejo

El número complejo $z = x + iy$ se puede representar como un vector cuyo extremo final tiene coordenadas polares (r, θ). Es fácil ver que $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$. Así pues,

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \tag{1.5}$$

es la *forma polar* de un número complejo.

Ejemplo 1.1 *Utilizando el argumento principal, represente en forma polar al número complejo* $z = 1 + i$.

Solución. Se tiene que las coordenadas polares de $z = 1 + i$ son:

$$r = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

El valor $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ es el argumento principal de $1 + i$, ya que pertenece al intervalo $(-\pi, \pi]$. Por lo tanto, la forma polar de $z = 1 + i$ empleando el argumento principal es:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

$\diamondsuit$

Por un razonamiento similar al utilizado en el Ejemplo 1.1 se puede verificar que la forma polar de los números complejos $-1 + i$, $-1 - i$ y $1 - i$ es:

$$\begin{aligned}
-1 + i &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right), \\
-1 - i &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right), \\
1 - i &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

1.4.1 Fórmula de Euler

Sea $z = x + iy$ un número complejo cuya forma polar viene dada por (1.5). Escribiendo

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

y suponiendo que $r = 1$, se obtiene que

$$z = e^{i\theta} \tag{1.6}$$

que se conoce como *fórmula de Euler*. Sean $z_1 = e^{i\theta_1}$ y $z_2 = e^{i\theta_2}$. Utilizando esta notación obtenemos las siguientes identidades:

1. $z_1 z_2 = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$;
2. $\dfrac{1}{z_1} = e^{-i\theta_1}$;
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Ahora, para cualquier $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ se puede utilizar la fórmula Euler para reescribir a z como:

$$z = re^{i\theta}$$

y, además, si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces las siguientes identidades son ciertas:

1. $z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1+\theta_2)}$;
2. $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{r_1} e^{-i\theta_1}$;
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Por lo tanto, la forma polar de z utilizando la fórmula de Euler es $z = re^{i\theta}$, donde r y θ son sus coordenadas polares (θ no necesariamente es el argumento principal de z).

1.5 Potencias y raíces

Definición 1.5 (Potencia) *Sean $z = re^{i\theta}$ y n un entero no negativo. La potencia n-ésima de z, denotada con z^n, se define como*

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta).$$

Definición 1.6 (Raíz) *Sean $z = re^{i\theta}$ y n un entero no negativo. Las raíces n-ésimas de z, denotadas con $z^{1/n}$, se definen como*

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left[\frac{\theta+2k\pi}{n}\right] + i\operatorname{sen}\left[\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

donde $\sqrt[n]{r}$ denota la raíz n-ésima del número real r.

Debemos alclarar que el valor de θ empleado en las definiciones 1.5 y 1.6, es cualquier valor del argumento de z, no necesariamente es el argumento principal.

Ejemplo 1.2 *Calcular $(1+i)^5$ y $(1+i)^{1/5}$.*

Solución. Las coordenadas polares de $1+i$ son:

$$r = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

De esta forma,

$$z^5 = \sqrt{2^5}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2^5}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$$

y

$$\sqrt[5]{z} = \sqrt[20]{2}\, e^{\frac{(\pi/4)+2k\pi}{5}} = \sqrt[20]{2}\left(\cos\frac{(\pi/4)+2k\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{(\pi/4)+2k\pi}{5}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

♢

1.6 Regiones en el plano complejo

En esta parte se estudiarán conjuntos especiales de números complejos, o puntos, y la proximidad de unos a otros.

Definición 1.7 (Vecindad) *El conjunto de puntos*

$$B(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\},$$

para cada punto z_0 *y cada* $\varepsilon > 0$*, se denomina vecindad de* z_0*, que consta de todos los puntos situados dentro de la circunferencia de centro* z_0 *y radio* ε*.*

Definición 1.8 (Conjunto abierto) *Se dice que un conjunto de números complejos* S *es abierto si para cada* $z \in S$ *existe una vecindad de* z*,* $B(z, \varepsilon)$*, tal que* $B(z, \varepsilon) \subset S$*.*

Ejemplo 1.3 *El conjunto* $|z| < 1$ *es abierto. En efecto, es posible trazar una vecindad* $B(z, \varepsilon)$ *alrededor de cada uno de sus puntos de tal forma que todos los puntos de* $B(z, \varepsilon)$ *pertenecen al conjunto* $|z| < 1$*.*

Definición 1.9 (Frontera de un conjunto) *Sea* S *un conjunto de números complejos. La frontera de* S *es el conjunto formado por los puntos* z *(no necesariamente pretenecientes a* S*) tales que* $B(z, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$*, para todo* $\varepsilon > 0$*; en otras palabras, todas las vecindades de* z *contienen puntos de* S *y puntos que no están en* S*.*

Ejemplo 1.4 *El conjunto* $|z - 1| = 1$ *es la frontera del conjunto* $|z - 1| < 1$*.*

Definición 1.10 (Punto de acumulación) *Sea* S *un conjunto de números complejos. Se dice que* z_0 *es un punto de acumulación de* S *si toda vecindad de* z_0 *contiene por lo menos un punto de* S *diferente de* z_0*.*

Definición 1.11 (Conjunto cerrado) *Se dice que un conjunto de números complejos* S *es cerrado, si todos sus puntos de acumulación pertenecen a él. Equivalentemente,* S *es cerrado si contiene a su frontera.*

Ejemplo 1.5 *El conjunto* $|z| \leq 1$ *es cerrado.*

Definición 1.12 (Conjunto conexo) *Se dice que un conjunto de números complejos* S *es conexo, si dados dos puntos cualesquiera de* S*, existe una trayectoria formada por segmentos de recta que los une y cuyos puntos pertenecen todos a* S*.*

Definición 1.13 (Dominio) *Se dice que el conjunto de números complejos* S *es un dominio, si* S *es abierto y conexo.*

Ejemplo 1.6 *El conjunto* $|z| < 1$ *es un dominio.*

Definición 1.14 (Conjuntos acotado y no acotado) *Se dice que un conjunto de números complejos* S *es acotado, si existe un número real* $R > 0$ *tal que todo punto de* S *queda dentro de la circunferencia* $|z| = R$*. Por el contrario, si* $|z| > R$ *para todo* $R > 0$ *y algún* $z \in S$*, se dice que* S *es no acotado.*

Ejemplo 1.7 *El conjunto que consiste en el cuadrado* $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$*,* $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$*, es acotado. La franja* $\{z : \operatorname{Re} z \leq 3\}$ *es un conjunto no acotado.*