Tema 10. Transformada de Laplace

Prof. William La Cruz Bastidas

2 de julio de 2002

Tema 10

Transformada de Laplace

10.1 Transformada de Laplace

En esta sección introducimos la transformada de Laplace de una señal continua. Se pueden distinguir dos tipos de transformadas de Laplace: Bilateral y Unilateral.

Definición 10.1 (Transformada de Laplace Bilateral) *Se define la **transformada de Laplace Bilateral** de una señal continua $x(t)$ como*

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt, \tag{10.1}$$

donde s es una variable compleja. En sí, la transformada de Laplace bilateral de una señal continua es una función analítica en cierto dominio, que se denomina región de convergencia.

Definición 10.2 (Transformada de Laplace Unilateral) *Sea $x(t)$ una señal continua. Se define la **Transformada de Laplace Unilateral** de $x(t)$ como*

$$\mathcal{X}(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt, \tag{10.2}$$

donde s es una variable compleja. En sí, la transformada de Laplace unilateral de una señal continua es una función analítica en cierto dominio, que se denomina región de convergencia.

En adelante para referirnos a la transformada de Laplace bilateral diremos, simplemente, transformada de Laplace. Cuando queramos resaltar si se está utilizando la transformada de Laplace bilateral o unilateral, lo indicaremos.

Por otra parte, veamos cómo se determina la región de convergencia de la transformada de Laplace de una señal continua $x(t)$, la cual la denotaremos como ROC. Si tomamos $s = \sigma + j\omega$, entonces (10.1) adquiere la forma

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)e^{-\sigma t})e^{-j\omega t}\,dt,$$

lo cual indica que la transformada de Laplace de $x(t)$ converge si, y sólo si la función $x(t)e^{-\sigma t}$ es absolutamente integrable; en otras palabras,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma t}\,dt < \infty.$$

El factor $e^{-\sigma t}$ es un factor de convergencia. Equivalentemente, $X(s)$ existe si, y sólo si la transformada de Fourier de $x(t)e^{-\sigma t}$ existe. Esto establece una estrecha relación entre la transformada de Laplace y la transformada de Fourier, en realidad, la transformada de Fourier es un caso particular de la transformada de Laplace, lo cual se corrovora simplemente tomando $s = j\omega$ en (10.1). En el siguiente ejemplo se ilustra el concepto de región de convergencia de la transformada de Laplace.

Ejemplo 10.1 *Hallar la transformada de Laplace de $x(t) = e^{-at}u(t)$ con $a > 0$.*

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\,dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+\sigma)t}e^{-j\omega t}\,dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+\sigma)t}(\cos\omega t - j\operatorname{sen}\omega t)\,dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+\sigma)t}\cos\omega t\,dt - j\int_{0}^{\infty} e^{-(a+\sigma)t}\operatorname{sen}\omega t\,dt \\
&= \frac{(a+\sigma)}{(a+\sigma)^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{(a+\sigma)^2+\omega^2} \\
&= \frac{(a+\sigma)-j\omega}{(a+\sigma)^2+\omega^2} \\
&= \frac{1}{(a+\sigma)+j\omega} = \frac{1}{s+a},
\end{aligned}$$

con ROC: $\sigma > -a$, dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-\sigma t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+\sigma)t}\,dt < 0$$

para $\sigma + a > 0$. Por lo tanto, $X(s) = \dfrac{1}{s+a}$ con ROC: $\operatorname{Re} s > -a$.

Definición 10.3 (Transformada inversa de Laplace) *Sea $x(t)$ una señal cuya transformada de Laplace es $X(s)$ con región de convergencia ROC. La transformada inversa de Laplace es el proceso de obtener $x(t)$ a través de $X(s)$ y se define como*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds, \tag{10.3}$$

es decir, la transformada inversa de Laplace es una integral de una función de variable compleja a lo largo del contorno $y = j\sigma$ de manera que $X(s)$ converja.

El cálculo de la transformada inversa de Laplace requiere integración sobre contornos en el plano complejo. Sin embargo, para la clase de transformadas racionales, la transformada inversa de Laplace se puede determinar sin evaluación directa de la integral (10.3), utilizando la expansión por fracciones parciales de $X(s)$ que la estudiaremos en la sección 10.4. El siguiente ejemplo muestra el proceso de cálculo de la transformada inversa de Laplace a través de la integración compleja.

Ejemplo 10.2 *Determine la transformada inversa de Laplace de*

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad \textit{ROC:}\ \mathrm{Re}\, s > -1.$$

Solución. A fin de hallar $x(t)$ consideremos el contorno cerrado simple C conformado por los contornos C_1 y C_2, donde C_1 y C_2 son, respectivamente, el arco de circunferencia $z(t) = Re^{it}$, $\pi/2 \le t \le 3\pi/2$, y el segmento de recta $z(t) = it$, $-R \le t \le R$, con $R > 0$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{e^{st}}{s+1}ds &= \frac{1}{2\pi j}\int_{C_1} \frac{e^{st}}{s+1}ds + \frac{1}{2\pi j}\int_{C_2} \frac{e^{st}}{s+1}ds \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{C_1} \frac{e^{st}}{s+1}ds + \frac{1}{2\pi j}\int_{-jR}^{jR} \frac{e^{st}}{s+1}ds. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Supongamos que $t \ge 0$. Se deja al lector demostrar, para $t \ge 0$, que

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{C_1} \frac{e^{st}}{s+1}ds\right] = 0. \tag{10.5}$$

De esta forma, considerando la ecuación (10.5) al tomar límite cuando R tiende a infinito en ambos lados de la ecuación (10.4) y empleando luego el Teorema de los Residuos obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{e^{st}}{s+1}ds &= \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{e^{st}}{s+1}ds \\ &= \mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s+1}\right]_{s=-1} \\ &= e^{-t}, \end{aligned}$$

lo cual indica que $x(t) = e^{-t}$ para $t \ge 0$. Como un ejercicio interesante se deja al lector demostrar que $x(t) = 0$ para $t < 0$. (*Ayuda:* El razonamiento es similar al que usamos anteriormente. Utilice un contorno cerrado simple C apropiado y el hecho que $|X(s)| \le 1/|s|$.) Por lo tanto, la tranformada inversa de Laplace de $X(s)$ es $x(t) = e^{-t}u(t)$.

10.2 Algunos pares de transformadas de Laplace

En la Tabla 10.1 se observan las transformadas de Laplace de las señales básicas.

Señal	**Transformada de Laplace**	**ROC**
$\delta(t)$	1	Todo $\mathcal{C}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$
$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\alpha$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\alpha$
$[\cos\omega_0 t]\, u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$[\mathrm{sen}\,\omega_0 t]\, u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\left[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\right] u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$
$\left[e^{-\alpha t}\mathrm{sen}\,\omega_0 t\right] u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$

Tabla 10.1: Pares básicos de transformadas de Laplace.

10.3 Propiedades de la transformada de Laplace

En la Tabla 10.2 se observan las propiedades de la transformada de Laplace.

Propiedad	Señal	Transformada de Laplace	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en tiempo	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
Desplazamiento en el dominio de s	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	Versión desplazada de R (es decir, s está en la ROC si $s-s_0$ está en R)
Escalamiento en tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC escalada (es decir, s está en la ROC si s/a está en R)
Conjugación	$\overline{x(t)}$	$\overline{X(\overline{s})}$	R
Convolución	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	Al menos R
Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
Integración en el dominio del tiempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	Al menos $R \cap \{\mathrm{Re}\,\{s\}>0\}$

Teoremas del valor inicial y final

Si $x(t)=0$ para $t<0$ y $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t=0$, entonces

$$x(0^+)=\lim_{s\to\infty} sX(s)$$
$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s)$$

Tabla 10.2: Propiedades de la transformada de Laplace.

10.4 Cálculo algebraico de la transformada inversa de Laplace

A menudo, tenemos la transformada de Laplace de una señal y queremos determinar la señal. Supongamos que la señal $x(t)$ posee transformada de Laplace, $X(s)$ con región de convergencia ROC. Daremos el método de Inversión con Tablas para econtrar la transformada inversa de Laplace.

Inversión con Tablas

Este método consiste en expresar a $X(s)$ como una suma

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) + \cdots + X_k(s), \tag{10.6}$$

donde $X_1(s), X_2(s), \ldots, X_k(s)$ son funciones tales que se les conoce su transformada inversa de Laplace $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)$. Si $X(s)$ puede expandirse como en (10.6), entonces su transformada inversa de Laplace es la suma

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_k(t).$$

Con mucha frecuencia se consigue con transformadas de Laplace racionales. A este tipo de transformadas le prestaremos una mayor atención. Aplicaremos el método inversión por tablas para hallar la transformada inversa de una transformada de Laplace racional.

Sea $X(s)$ una función racional propia, esto es,

$$X(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_M s^M}{1 + a_1 s + \cdots + a_N s^N}, \tag{10.7}$$

donde $a_N \neq 0$ y $M < N$. La expansión (10.6) de $X(s)$, cuando ésta es racional, se denomina *expansión en fracciones parciales.* A continuación explicamos la expansión en fracciones parciales.

Sean $p_1, p_2, \ldots, p_N$ polos de $X(s)$. Nuestro objetivo al realizar la expansión en fracciones parciales es expresar (10.7) como una suma de fracciones simples. Con este propósito, factorizamos el polinomio del denominador en factores que contengan los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ de $X(s)$. Se distinguen dos casos.

Polos diferentes. Supongamos que los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ son todos diferentes. Entonces se busca una expansión de la forma

$$X(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{A_N}{s - p_N}, \tag{10.8}$$

donde

$$A_k = \left[(s - p_k)X(s)\right]\big|_{s=p_k}, \text{ para } k = 1, 2, \ldots, N.$$

Polos de orden múltiple. Sin pérdida de generalidad supongamos que $X(s)$ tiene un polo de orden $r > 1$, esto es, si en su denominador aparece un factor de la forma $(s - p_i)^r$, entonces la expansión dada en (10.8) no es válida. En este caso la expansión de $X(s)$ es:

$$\begin{aligned} X(s) \quad = \quad & \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{A_{i-1}}{s - p_{i-1}} + \frac{A_{i,1}}{s - p_i} + \frac{A_{i,2}}{(s - p_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,r}}{(s - p_i)^r} \\ & + \frac{A_{i+1}}{s - p_{i+1}} + \cdots + \frac{A_l}{s - p_l} \end{aligned} \tag{10.9}$$

donde l es un entero positivo tal que $N = r + l - 1$. Así,

$$A - k = \left.[(s - p_k)X(s)]\right|_{s=p_k}, \text{ para } k \neq i$$

y

$$A_{i,t} = \frac{1}{(r-t)!}\frac{d^{(r-t)}}{ds^{(r-t)}}\left.[(s-p_i)^r X(s)]\right|_{s=p_i}, \text{ para } t = 1, 2, \ldots, r.$$

El siguiente ejemplo ilustra el método de inversión por tablas y la expansión en fracciones parciales.

Ejemplo 10.3 *Determine la transformada inversa de Laplace de*

$$X(s) = \frac{144s^2 + 144s + 144}{(s-3)^2(s-2)^2(s+1)}, \qquad \textit{ROC: } 2 < \operatorname{Re} s < 3.$$

Solución. La expansión en fracciones parciales de $X(s)$ es de la forma:

$$X(S) = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_{2,1}}{(s-2)} + \frac{A_{2,2}}{(s-2)^2} + \frac{A_{3,1}}{(s-3)} + \frac{A_{3,2}}{(s-3)^2}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left.[(s+1)X(s)]\right|_{s=-1} = \left.\left[\frac{144s^2+144s+144}{(s-3)^2(s-2)^2}\right]\right|_{s=-1} = 1, \\
A_{2,2} &= \left.\left[(s-2)^2X(s)\right]\right|_{s=2} = \left.\left[\frac{144s^2+144s+144}{(s-3)^2(s+1)}\right]\right|_{s=2} = 336, \\
A_{2,1} &= \left.\left[\frac{d}{ds}\left((s-2)^2X(s)\right)\right]\right|_{s=2} = \left.\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{144s^2+144s+144}{(s-3)^2(s+1)}\right)\right]\right|_{s=2} = 800, \\
A_{3,2} &= \left.\left[(s-3)^2X(s)\right]\right|_{s=3} = \left.\left[\frac{144s^2+144s+144}{(s-2)^2(s+1)}\right]\right|_{s=3} = 468, \\
A_{3,1} &= \left.\left[\frac{d}{ds}\left((s-3)^2X(s)\right)\right]\right|_{s=3} = \left.\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{144s^2+144s+144}{(s-2)^2(s+1)}\right)\right]\right|_{s=3} = -801.
\end{aligned}$$

Así,

$$X(S) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{800}{(s-2)} + \frac{336}{(s-2)^2} - \frac{801}{(s-3)} + \frac{468}{(s-3)^2}, \qquad \text{ROC: } 2 < \operatorname{Re} s < 3.$$

Luego,

$$x(t) = e^{-t}u(t) + 800e^{2t}u(t) + 336te^{2t}u(t) + 801e^{3t}u(-t) - 468te^{3t}u(-t)$$

o, equivalentemente,

$$x(t) = \left(e^{-t} + 800e^{2t} + 336te^{2t}\right)u(t) + \left(801e^{3t} - 468te^{3t}\right)u(-t).$$