Tema 11. Transformada z

Prof. William La Cruz Bastidas

2 de julio de 2002

Tema 11

Transformada z

11.1 Transformada z

En esta sección introducimos la transformada z de una señal discreta. Se pueden distinguir dos tipos de transformada z: Bilateral y Unilateral.

Definición 11.1 (Transformada z Bilateral) *Se define la* ***Transformada*** z ***Bilateral*** *de una señal discreta* $x(n)$ *como*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n},$$

donde z *es una variable compleja. En sí, la transformada* z *bilateral de una señal discreta es una función analítica en cierto dominio, que se denomina región de convergencia.*

Definición 11.2 (Transformada z Unilateral) *Sea* $x(n)$ *una señal discreta. Se define la* ***Transformada*** z ***Unilateral*** *de* $x(n)$ *como*

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n},$$

donde z *es una variable compleja. En sí, la transformada* z *unilateral de una señal discreta es una función analítica en cierto dominio, que se denomina región de convergencia.*

En adelante para referirnos a la transformada z bilateral diremos, simplemente, transformada z. Cuando queramos resaltar si se está utilizando la transformada z bilateral o unilateral, lo indicaremos.

La transformada z se denomina a veces *transformada z directa* porque transforma una señal en el dominio del tiempo $x(n)$ en la señal compleja $X(z)$. El procedimiento inverso, es decir, el que obtiene $x(n)$ a partir de $X(z)$, se denomina *transformada z inversa* y se discute en la Sección 4.3.

Por conveniencia, la transformada z de una señal $x(n)$ se denota por

$$X(z) \equiv Z\left\{x(n)\right\}$$

mientras que la relación entre $x(n)$ y $X(z)$ se indica mendiante

$$x(n) \longleftrightarrow X(z)$$

y se denomina par de transformadas z.

Dado que la transformada z es una serie infinita de potencias, ésta existe sólo para aquellos valores de z para los que la serie converge. La *región de convergenica*, ROC, de $X(z)$ es el conjunto de todos los valores de z para los que $X(z)$ es finita. Por lo tanto, siempre que hablemos de una transformada z debemos indicar también su ROC.

Ejemplo 11.1 *Calcular las tranformadas z bilateral y unilateral de $x(n) = a^n u(n)$, $a \in \mathcal{C}$ y especifique su región de convergencia.*

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n, \end{aligned}$$

esta serie converge si es absolutamente convergente, es decir, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|az^{-1}\right|^n < \infty$$

y esto es cierto si $\left|az^{-1}\right| < 1$. Por tanto, la transformada z de $x(n)$ es

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad \text{ROC: } |z| > |a|.$$

11.2 Transformada z Inversa

A menudo, tenemos la transformada z de una señal y queremos determinar la señal. Supongamos que la señal $x(n)$ posee transformada z, $X(z)$, cuya ROC es el anillo $r_1 < |z| < r_2$, con $r_1 > r_2 > 0$. Daremos tres métodos alternativos para calcular la transformada z inversa: Integración Compleja, Inversión con Tablas y Expansión en Serie de Potencias.

Integración Compleja

Como $X(z)$ es una función analítica en el anillo, la transformada inversa z se reduce a integrar una función analítica a lo largo de un contorno cerrado simple. En otras palabras,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_C X(z) z^{n-1} dz,$$

donde $C = \{z \in \mathcal{C} : |z| = r,\ r_1 < r < r_2\}$.

Para calcular $x(n)$ a través de este método, se puede utilizar el teorema integral de Cauchy o el Teorema de los Residuos.

Ejemplo 11.2 *Calcular la transformada z inversa de*

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad \text{ROC: } |z| > |a|.$$

Solución. Sea C la circunferencia $|z| = r > |a|$. Así,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\int_C X(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{z^n}{z-a}dz.$$

Supongamos que $n \geq 0$. Aplicando el Teorema de los Residuos

$$x(n) = \text{Res}\left[\frac{z^n}{z-a}\right]_{z=a} = a^n.$$

Cuando $n < 0$, entonces aplicamos nuevamente el Teorema de los Residuos

$$x(n) = \text{Res}\left[\frac{z^n}{z-a}\right]_{z=0} + \text{Res}\left[\frac{z^n}{z-a}\right]_{z=a} = -a^n + a^n = 0.$$

Por lo tanto, la transformada z inversa de $X(z)$ es

$$x(n) = a^n u(n).$$

Inversión con Tablas

Este método consiste en expresar a $X(z)$ como una suma

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) + \cdots + X_k(z), \tag{11.1}$$

donde $X_1(z), X_2(z), \ldots, X_k(z)$ son funciones tales que se les conoce su transformada z inversa $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$. Si $X(z)$ puede expandirse como en (11.1), entonces su transformada z inversa es la suma

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) + \cdots + x_k(n).$$

Con mucha frecuencia se consigue con transformadas z racionales. A este tipo de transformadas le prestaremos una mayor atención. Aplicaremos el método inversión por tablas para hallar la transformada z inversa de una transformada z racional.

Sea $X(z)$ una función racional propia, esto es,

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}, \tag{11.2}$$

donde $a_N \neq 0$ y $M < N$. La expansión (11.1) de $X(z)$, cuando ésta es racional, se denomina *expansión en fracciones parciales.* A continuación explicamos la expansión en fracciones parciales.

Sean $p_1, p_2, \ldots, p_N$ polos de $X(z)$. Por simplicidad, eliminemos las potencias negativas de z multiplicando tanto el numerador como el denominador de (11.2) por z^N. Así, obtenemos

$$X(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \cdots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}$$

que contiene potencias positivas de z. Dado que $M > N$, la función

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \cdots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N} \tag{11.3}$$

es propia.

Nuestro objetivo al realizar la expansión en fracciones parciales es expresar (11.3) o, equivalentemente, (11.2) como una suma de fracciones simples. Con este propósito, factorizamos el polinomio del denominador en factores que contengan los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ de $X(z)$. Se distinguen dos casos.

Polos diferentes. Supongamos que los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ son todos diferentes. Entonces se busca una expansión de la forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{A_N}{z - p_N}, \tag{11.4}$$

donde

$$A_k = \left. \frac{(z - p_k)X(z)}{z} \right|_{z=p_k}, \text{ para } k = 1, 2, \ldots, N.$$

Polos de orden múltiple. Si $X(z)$ tiene un polo de multiplicidad r, esto es, si en su denominador aparece un factor de la forma $(z - p_i)^r$, entonces la expansión dada en (11.4) no es válida. En este caso la expansión de $\frac{X(z)}{z}$ es:

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} \quad = \quad & \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{A_{i-1}}{z - p_{i-1}} + \frac{A_{i,1}}{z - p_i} + \frac{A_{i,2}}{(z - p_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,r}}{(z - p_i)^r} \\ & + \frac{A_{i+1}}{(z - p_{i+1})} + \cdots + \frac{A_l}{z - p_l} \end{aligned} \tag{11.5}$$

donde l es un entero positivo tal que $N = r + l - 1$. Así,

$$A_k = \left. \frac{(z - p_k)X(z)}{z} \right|_{z=p_k}, \text{ para } k \neq i$$

y

$$A_{i,t} = \frac{1}{(r-t)!} \frac{d^{(r-t)}}{dz^{(r-t)}} \left. \frac{(z - p_i)^r X(z)}{z} \right|_{z=p_i}, \text{ para } t = 1, 2, \ldots, r.$$

Ejemplo 11.3 *Determinar la transformada z inversa de*

$$X(z) = \frac{1}{(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})^2} \qquad \text{ROC: } |z| > 1.$$

Solución. Se tiene que

$$X(z) = \frac{1}{\left(\frac{z+1}{z}\right)\left(\frac{z-1}{z}\right)^2} = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2},$$

luego

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}.$$

Así, la expansión en fracciones parciales de $\frac{X(z)}{z}$ es

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_{2,1}}{z-1} + \frac{A_{2,2}}{(z-1)^2},$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[(z+1)\frac{X(z)}{z}\right]\Big|_{z=-1} = \frac{1}{4}, \\ A_{2,1} &= \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{X(z)}{z}\right]\Big|_{z=1} = \frac{3}{4} \\ A_{2,2} &= \left[(z-1)^2\frac{X(z)}{z}\right]\Big|_{z=1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1/4}{z+1} + \frac{3/4}{z-1} + \frac{1/2}{(z-1)^2},$$

luego

$$X(z) = \frac{1/4}{1+z^{-1}} + \frac{3/4}{1-z^{-1}} + \frac{1/2z^{-1}}{(1+z^{-1})^2}.$$

Por lo tanto, la transformada z inversa de $X(z)$ es

$$\begin{aligned} x(n) &= Z^{-1}\left\{\frac{1/4}{1+z^{-1}}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{3/4}{1-z^{-1}}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{1/2z^{-1}}{(1+z^{-1})^2}\right\} \\ &= \frac{1}{4}(-1)^n u(n) + \frac{3}{4}u(n) + \frac{1}{2}nu(n). \end{aligned}$$

Expansión en Serie de Potencias

Este procedimiento consiste en encontrar el desarrollo de Laurent de $X(z)$ alrededor del cero, luego definir a $x(n)$ como los coeficientes de esta serie de potencias. Esto es motivado por la observación de que la definición de la transformada z puede interpretarse como una serie de potencias que involucra potencias de z tanto positivas como negativas. Los coeficientes de esta serie de potencias son, de hecho, los valores de la sucesión $x(n)$. Expliquemos este procedimiento a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 11.4 *Hallar la transformada z inversa de*

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \qquad \textit{ROC: } |z| > |a|,$$

donde a es un número real.

Solución. Se tiene que el desarrollo de Maclaurin de $\log(1 + w)$ para $|w| < 1$ es

$$\log(1 + w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^n}{n} \qquad |w| < 1.$$

Ahora tomando $w = az^{-1}$, se obtiene el desarrollo de Laurent de $X(z)$ alrededor del cero

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n},$$

para $\left|az^{-1}\right| < 1$, equivalentemente, $|z| > |a|$, luego

$$x(n) = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} u(n-1).$$

11.3 Algunos pares de transformadas z

En la Tabla 11.1 se observan las transformadas z de las señales básicas.

Señal	**Tranasformada z**	**ROC**
$\delta(n)$	1	Todo $\mathcal{C}$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$\delta(n-m)$	z^{-m}	Todo $\mathcal{C}$ excepto 0 (si $m>0$) ó ∞ (si $m<0$)
$\alpha^n u(n)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
$-\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| < \|\alpha\|$
$n\alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
$-n\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| < \|\alpha\|$
$[\cos\omega_0 n]\, u(n)$	$\frac{1-[\cos\omega_0]\, z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$[\operatorname{sen}\omega_0 n]\, u(n)$	$\frac{[\operatorname{sen}\omega_0]\, z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$[r^n\cos\omega_0 n]\, u(n)$	$\frac{1-[r\cos\omega_0]\, z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]\, z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
$[r^n\operatorname{sen}\omega_0 n]\, u(n)$	$\frac{[r\operatorname{sen}\omega_0]\, z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]\, z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$

Tabla 11.1: Pares básicos de transformadas z.

11.4 Propiedades de la transformada z

Recuérdese que la ROC resultante cuando combinamos varias transformadas z es, cuando menos, la intersección entre las ROC de las transformadas individuales. En la Tabla 11.2 se observan las propiedades de la transformada z.

Propiedad	**Señal**	**Transformada z**	**ROC**
	$x(n)$	$X(z)$	R
	$x_1(n)$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2(n)$	$X_2(z)$	R_2
Linealidad	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en tiempo	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} X(z)$	R, ó $R \cup \{0\}$, ó $R - \{0\}$
Escalamiento en el dominio de z	$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X\left(e^{-j\omega_0} z\right)$	R
	$z_0^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
	$a^n x(n)$	$X\left(a^{-1} z\right)$	$\lvert a\rvert R = \{w : w = \lvert a\rvert z,\ z \in R\}$
Inversión en el tiempo	$x(-n)$	$X\left(z^{-1}\right)$	$R^{-1} = \left\{w : w = z^{-1},\ z \in R\right\}$
Conjugación	$\overline{x(n)}$	$\overline{X(\overline{z})}$	R
Convolución	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) X_2(z)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Primera Diferencia	$x(n) - x(n-1)$	$\left(1 - z^{-1}\right) X(z)$	Al menos $R \cap \{z : \lvert z\rvert > 0\}$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	Al menos $R \cap \{z : \lvert z\rvert > 1\}$
Diferenciación en el dominio de z	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R

Teorema del valor inicial

Si $x(n) = 0$ para $n < 0$, entonces

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Tabla 11.2: Propiedades de la transformada z.