

Tema 5. Series de Potencias

Prof. William La Cruz Bastidas

21 de noviembre de 2002



Tema 5

Series de Potencias

Definición 5.1 La sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene un límite o converge a un número complejo z , si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número entero positivo N tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad n > N.$$

Cuando el límite de la sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ existe, es decir, que $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a z , se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Si la sucesión no tiene límite diverge.

Teorema 5.1 Sean $z_n = x_n + iy_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), para x_n y y_n números reales, y $z = x + iy$ para x y y números reales. Entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ si, y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Ejemplo 5.1 Determinar si la sucesión

$$z_n = \frac{1}{n} + i \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

converge y halle el límite si es el caso.

Solución. Se tiene que $z_n = x_n + iy_n$, donde

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Ahora,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1.$$

Por el Teorema 6.1 la sucesión $z_n = \frac{1}{n} + i \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ converge y, además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = i.$$

◇

Definición 5.2 Una serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$$

de números complejos converge a un número complejo S , llamado suma de la serie, si la sucesión

$$S_N = \sum_{n=0}^N z_n \quad (N = 0, 1, 2, \dots)$$

de sumas parciales converge a S ; entonces se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S.$$

Teorema 5.2 Sean $z_n = x_n + iy_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) para x_n y y_n números reales, y $S = X + iY$ para X y Y números reales. Entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$ si, y sólo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = X \quad y \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = Y.$$

Definición 5.3 (Serie de potencias) Dada una sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos, a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{5.1}$$

se le llama serie de potencias. A los números complejos a_n se les llama coeficientes de la serie; z_0 y z son números complejos.

El siguiente teorema da una idea completa del campo de convergencia de las series de potencias.

Teorema 5.3 Sea $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces, si $\alpha = \infty$, la serie (5.1) es convergente en el único punto $z = z_0$; si $0 < \alpha < \infty$, la serie es absolutamente convergente en el círculo $|z - z_0| < \frac{1}{\alpha}$ y es divergente en el exterior de este círculo; si $\alpha = 0$, la serie es absolutamente convergente en todo el plano.

De este modo, cuando $0 < \alpha < \infty$, existe un círculo con el centro en el punto $z = z_0$, en el interior del cual la serie (5.1) es absolutamente convergente y en el exterior del cual la serie es divergente. Este se llama *círculo de convergencia de la serie de potencias* y su radio $R = \frac{1}{\alpha}$, radio de convergencia de la misma. Los casos $\alpha = \infty$, y $\alpha = 0$ se pueden considerar como casos límites. En el primero de ellos el círculo de convergencia se reduce a un punto z_0 y su radio R es igual a cero. En el segundo, el círculo de convergencia se extiende a todo el plano, de modo que se puede considerar que su radio es igual a ∞ . Llamando en los tres casos al número R radio de convergencia de la serie de potencias, el contenido de la fórmula de Cauchy-Hadamard puede expresarse por la fórmula

$$R = \frac{1}{\alpha}.$$



Esta última se llama *fórmula de Cauchy-Hadamard*. Para las aplicaciones de la fórmula de Cauchy-Hadamard, en muchos casos suele ser útil la relación siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}. \quad (5.2)$$

La demostración de esta relación se deja como ejercicio para el lector.

Ejemplo 5.2 Hallar el círculo y el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n.$$

Solución. Los coeficientes a_n son iguales a $\frac{n^n}{n!}$ y $z_0 = 0$. Utilizando la ecuación (5.2) obtenemos

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e,$$

por lo tanto, el radio de convergencia de la serie es

$$R = \frac{1}{e}$$

y el círculo de convergencia de la misma es

$$|z| < \frac{1}{e}.$$

◇

En muchos casos resulta conveniente determinar el radio de convergencia de una serie de potencias mediante el criterio del cociente, es decir, tomando

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Así, en el Ejemplo 5.2

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1) n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= e, \end{aligned}$$

por consiguiente, el radio de convergencia de la serie es $R = \frac{1}{e}$.

5.1 Serie de Taylor

Dada una función analítica ¿es siempre posible encontrar una serie de potencias cuya suma sea dicha función en algún dominio? Dicho de otro modo ¿es posible representar cualquier función analítica por medio de una serie de potencias? La respuesta es afirmativa, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 5.4 (Teorema de Taylor) Sea $f(z)$ una función analítica en todo punto del disco C_0 , con centro en z_0 y radio r_0 . Entonces, en cada punto de z del disco C_0 , $f(z)$ se expresa como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad (5.3)$$

es decir, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < r_0$.

La serie (5.3) se denomina *desarrollo en serie de Taylor* o, simplemente, *desarrollo de Taylor* de $f(z)$ alrededor del punto z_0 . Si $z_0 = 0$, el desarrollo de Taylor (5.3) adquiere la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

y se denomina *desarrollo de Maclaurin* de $f(z)$.

Ejemplo 5.3 Dada la función $f(z) = e^z$ halle:

- (a) el desarrollo de Maclaurin de $f(z)$;
- (b) el desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor de $z = -i$.

Solución.

- (a) El desarrollo de Maclaurin de e^z es

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde

$$a_n = \left. \frac{d^n}{z^n} e^z \right|_{z=0} = \left. \frac{e^z}{n!} \right|_{z=0} = \frac{1}{n!}.$$

Así,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Puesto que e^z es entera, el Teorema de Taylor afirma que la serie anterior converge a e^z en todo punto del plano complejo.

(b) El desarrollo de Taylor de e^z alrededor de $z = -i$ es

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + i)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{d^n}{z^n} e^z \Big|_{z=-i} = \frac{e^z}{n!} \Big|_{z=-i} = \frac{e^{-i}}{n!};$$

así,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i}}{n!} (z + i)^n.$$

Esta serie es también válida en todo punto del plano complejo.

◇

Los siguientes son otros desarrollos de Maclaurin que pueden resultar útiles:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\operatorname{cos} z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\operatorname{cosh} z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Estos desarrollos de Maclaurin son válidos en todo el plano complejo puesto que las cuatro funciones de la izquierda son enteras.

El siguiente teorema nos garantiza que el desarrollo de Taylor alrededor de z_0 de una función $f(z)$, es la única serie de potencias que converge a $f(z)$ en un disco centrado en z_0 .

Teorema 5.5 *El desarrollo en serie de Taylor alrededor de z_0 de una función $f(z)$ es la única serie de potencias de $(z - z_0)$ que converge a $f(z)$ en todo punto de un disco centrado en z_0 .*

El siguiente teorema nos permite calcular el radio de convergencia del mayor círculo para el cual la serie de Taylor de una función $f(z)$ converge a $f(z)$.

Teorema 5.6 *Consideremos el desarrollo en serie de Taylor (5.3) de una función $f(z)$ alrededor de z_0 . El mayor círculo dentro del cual esta serie converge a $f(z)$ en cada punto es $|z - z_0| = r$, donde r es la distancia entre z_0 y el punto singular de $f(z)$ más cercano.*

Obsérvese que este teorema no afirma que la serie de Taylor no converja fuera de $|z - z_0| = r$. Sólo asevera que éste es el mayor círculo en todo punto del cual la serie converge a $f(z)$.

El círculo en todo punto del cual la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ converge a $f(z)$ y el círculo en todo punto del cual la serie converge no son necesariamente iguales. El segundo de ellos puede tener un radio mayor. En el Ejercicio 18 de este tema se considera este hecho. No obstante, se puede mostrar que cuando el punto singular más cercano a z_0 es tal que $|f(z)|$ se hace infinito, los dos círculos coinciden. Éste es el caso en la mayor parte de las funciones que consideraremos.

Ejemplo 5.4 Sin determinar el desarrollo de Taylor, calcule el radio del círculo máximo en donde el desarrollo indicado es válido:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n.$$

Solución. La serie converge dentro de un disco centrado en $z_0 = -1$. El punto singular de $f(z)$ es $z = 1$. La distancia de z_0 a $z = 1$ es 2. Así, el desarrollo de Taylor converge a $f(z)$ en el disco $|z + 1| < 2$. ◇

5.2 Serie de Laurent

Definición 5.4 (Serie de Laurent) El desarrollo en serie de Laurent o, simplemente, desarrollo de Laurent de una función $f(z)$ alrededor del punto z_0 es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{5.4}$$

donde la serie converge a $f(z)$ en cierto dominio o región.

Así pues, un desarrollo de Laurent, a diferencia del desarrollo de Taylor, puede contener uno o más términos con $(z - z_0)$ elevado a una potencia negativa. También puede contener potencias positivas de $(z - z_0)$.

Normalmente los desarrollos de Laurent se obtienen a partir de los desarrollos de Taylor. Por ejemplo, para encontrar el desarrollo de Laurent de $f(z) = e^{1/z}$ alrededor de $z_0 = 0$, se considera el desarrollo de Maclaurin de e^s ,

$$e^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n,$$

después, se hace $s = 1/z$ en la ecuación anterior para obtener

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \quad z \neq 0,$$

que es, efectivamente, el desarrollo de Laurent de $e^{1/z}$ alrededor de $z = 0$ y es válido en todo el plano complejo excepto en $z = 0$.

¿Qué clase de funciones pueden representarse por medio de series de Laurent y en qué región del plano complejo será válida dicha representación? La respuesta se encuentra en el siguiente teorema. Antes de dar el teorema, definiremos dominio anular.



Definición 5.5 (Dominio anular) Sean $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ tales que $r_2 < r_1$. Se denomina dominio anular al conjunto D conformado por todos los z tales que $r_2 < |z - z_0| < r_1$.

Teorema 5.7 (Teorema de Laurent) Si $f(z)$ es analítica en el dominio anular D ,

$$r_2 < |z - z_0| < r_1,$$

entonces en cada punto z de ese dominio, $f(z)$ está representada por el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Los coeficientes c_n están dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (5.5)$$

donde C es cualquier contorno cerrado simple contenido en D y tal que la frontera interna, $|z - z_0| = r_2$, quede confinada por C .

Consideraciones acerca del Teorema de Laurent

- Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos de la región $|z - z_0| \leq r_1$, entonces el desarrollo de Laurent de $f(z)$ se convierte en el desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor de z_0 .
- Si $f(z)$ es analítica en la región $|z - z_0| < r_1$ excepto en el punto z_0 , entonces el desarrollo de Laurent es válido en toda la región $0 < |z - z_0| < r_1$.
- Si $f(z)$ es analítica en todo punto del plano z que no pertenezca a cierto círculo, entonces es posible encontrar un desarrollo de Laurent de $f(z)$ que sea válido en una región anular cuyo radio exterior r_1 es infinito.

Ejemplo 5.5 Desarrolle

$$f(z) = \frac{1}{z + 1}$$

en serie de Laurent en potencias de z . Determine el dominio en el que la serie converge a $f(z)$.

Solución. Observamos que el único punto singular de $f(z)$ es $z = -1$, entonces $f(z)$ tiene un desarrollo de Maclaurin en el disco $|z| < 1$. Según el Teorema de Laurent, con $z_0 = 0$, se puede representar a $f(z)$ mediante una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

en el dominio anular $|z| > 1$. Ahora necesitamos determinar los valores de los coeficientes c_n . Lo podemos hacer utilizando la ecuación (5.5) ó empleando el desarrollo de Maclaurin de $g(w) = \frac{1}{1 + w}$,

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad |w| < 1.$$



Nosotros utilizaremos el desarrollo de Maclaurin de $g(w)$ para obtener los c_n . Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z+1} &= \frac{1/z}{1+1/z} \\
 &= \left(\frac{1}{z}\right) \left(\frac{1}{1+1/z}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{z}\right) g(1/z) \\
 &= \left(\frac{1}{z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1/z)^n, \quad |1/z| < 1 \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-(n+1)}, \quad |z| > 1 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-n}, \quad |z| > 1.
 \end{aligned}$$

De esta forma, los coeficientes del desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z = 0$ son:

$$c_n = \begin{cases} (-1)^{n-1} & n \leq -1 \\ 0 & n \geq 0. \end{cases}$$

◇

5.3 Propiedades adicionales de las series

5.3.1 Diferenciación e integración término a término

Si una función $f(z)$ está representada con una serie de potencias en una región anular R , la serie que se obtiene por diferenciación término a término converge a $f'(z)$ dentro de R . Este procedimiento puede repetirse un número indefinido de veces. También es cierto que si se integra término a término la representación en serie de $f(z)$ a lo largo de una trayectoria contenida en R , la serie que resulta de esta operación converge a la integral de $f(z)$ efectuada a lo largo de la misma trayectoria.

Los siguientes ejemplos utilizan las propiedades de diferenciación e integración término a término para encontrar desarrollos de Taylor.

Ejemplo 5.6 Usando el desarrollo de Taylor de $1/z$ alrededor de $z_0 = 1$, obtenga el desarrollo de $1/z^2$ alrededor del mismo punto.

Solución. Vemos que $f(z) = 1/z$ es una función analítica en todo el plano complejo excepto en el cero. Así, por los Teoremas 6.4, 6.5 y 6.6, el desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor de $z = 1$ es:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n,$$

el cual es válido en el disco $|z - 1| < 1$. Ahora, diferenciando término a término la serie anterior obtenemos

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (z - 1)^{n-1},$$

para todo z tal que $|z - 1| < 1$. De esta forma, el desarrollo de Taylor de $1/z^2$ es

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1) (z - 1)^n,$$

para todo z tal que $|z - 1| < 1$.

◇

Ejemplo 5.7 Obtenga la serie de Maclaurin de

$$g(z) = \int_0^z f(s) ds,$$

donde

$$f(s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} s}{s} & s \neq 0 \\ 1 & s = 0. \end{cases}$$

Solución. Sabemos que el desarrollo de Maclaurin de $\operatorname{sen} s$ es

$$\operatorname{sen} s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{s^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

el cual es válido en todo el plano complejo. Así,

$$\frac{\operatorname{sen} s}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{s^{2n-2}}{(2n-1)!}.$$

Se observa que esta serie converge a $f(s)$ cuando $s \neq 0$ y cuando $s = 0$. Ahora, integrando término a término la serie anterior

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{\operatorname{sen} s}{s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z (-1)^{n+1} \frac{s^{2n-2}}{(2n-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!(2n-1)} \right] s^{2n-1} \Big|_0^z \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!(2n-1)} \right] z^{2n-1}. \end{aligned}$$

De esta forma, el desarrollo de Maclaurin de $g(z)$ es

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!(2n-1)} \right] z^{2n-1}$$

que es válido en todo el plano complejo.

◇



5.3.2 Multiplicación y división

Sin pérdida de generalidad, se supone que cada una de las series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

converge dentro de cierta circunferencia $|z| = r_0$. Las sumas $f(z)$ y $g(z)$ son entonces funciones analíticas en el disco $|z| < r_0$, y el producto de esas sumas tiene un desarrollo en serie de Maclaurin que es válido en ese disco:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (5.6)$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

La serie (5.6) es igual a la serie que se obtiene al multiplicar las dos series de $f(z)$ y $g(z)$ entre sí término a término y agrupando los términos que resulten potencias iguales de z ; a dicha serie se le llama *producto de Cauchy* de las dos series dadas.

Por otra parte, supongamos que $g(z) \neq 0$ en cierta vecindad del origen. El cociente $h(z) = f(z)/g(z)$ es analítico en esa vecindad y por eso admite un desarrollo de Maclaurin

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n,$$

donde $d_0 = h(0)$, $d_1 = h'(0)$, $d_2 = h''(0)/2!$, etc. Algunos de estos primeros coeficientes se pueden encontrar en términos de los coeficientes a_n y b_n de las series de $f(z)$ y $g(z)$, al diferenciar sucesivamente el cociente $f(z)/g(z)$. Los resultados son los mismos que los que se encuentran al efectuar la división de la serie de $f(z)$ entre la serie de $g(z)$. También podemos encontrar estos primeros términos mediante el siguiente procedimiento. Se tiene que

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n,$$

de donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

de esta forma,

$$\begin{aligned} d_0 b_0 &= a_0, \\ d_0 b_1 + d_1 b_0 &= a_1, \\ d_0 b_2 + d_1 b_1 + d_2 b_0 &= a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De la primera ecuación tenemos

$$d_0 = \frac{a_0}{b_0},$$



e introduciendo este resultado en la segunda ecuación obtenemos

$$d_1 = \frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2}.$$

Estos resultados nos permiten despejar d_2 de la tercera ecuación:

$$d_2 = \frac{a_2}{b_0} - \frac{a_1 b_1 + a_0 b_2}{b_0^2} + \frac{a_0 b_1^2}{b_0^3}.$$

El procedimiento anterior puede repetirse para obtener cualquiera de los coeficientes d_n , donde n es tan grande como deseemos. Éste es un ejemplo de procedimiento recurrente, en el que se usan los valores de d_1, d_2, \dots, d_{n-1} ya calculados para encontrar la siguiente incógnita d_n .

