

Tema 6. Polos y Residuos

Prof. William La Cruz Bastidas

21 de noviembre de 2002



Tema 6

Polos y Residuos

6.1 Puntos singulares aislados

Definición 6.1 (Punto Singular Aislado) Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se dice que es un punto singular aislado de una función $f(z)$, si éste es singular y, además, existe una vecindad de z_0 en todo punto de la cual $f(z)$ es analítica excepto en ese punto.

Ejemplo 6.1 Encontrar los puntos singulares aislados de la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z - 2}$.

Solución. Se tiene que $z = 2$ es el único punto singular de $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z - 2}$, dado que $f(z)$ es el cociente de las funciones enteras $f_1(z) = \operatorname{sen} z$ y $f_2(z) = z - 2$, y $z = 2$ es el único cero de $f_2(z)$. Luego, $z = 2$ es un punto singular aislado. \diamond

6.1.1 Tipos de singularidades aisladas

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (6.1)$$

el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor del punto singular aislado z_0 .

Definición 6.2 (Parte Principal) La parte del desarrollo de Laurent de $f(z)$ que posee potencias negativas de $z - z_0$ se denomina **parte principal** de f en z_0 . En otras palabras, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ es la parte principal de f en z_0 .

Ejemplo 6.2 Determine la parte principal de $f(z) = \frac{1}{z(z - 1)}$ en cada uno de sus puntos singulares.

Solución. Los puntos singulares aislados de $f(z) = \frac{1}{z(z - 1)}$ son $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$. El desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z_1 = 0$ es

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} + \frac{1}{z}, \quad 0 < |z| < 1$$

de donde se deduce que la parte principal de $f(z)$ en $z_1 = 0$ es: $\left(-\frac{1}{z}\right)$.

Por otra parte, el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z_2 = 1$ es

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-1} + \frac{1}{z-1}, \quad 0 < |z-1| < 1$$

de donde se deduce que la parte principal de $f(z)$ en $z_2 = 1$ es: $\left(\frac{1}{z-1}\right)$. ◇

Definición 6.3 (Polo de orden m) Sea z_0 un punto singular aislado de una función $f(z)$. Se dice que z_0 es un **polo de orden m** de f si el desarrollo (6.1) toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}, \quad (6.2)$$

donde $b_m \neq 0$ y $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = 0$. En otras palabras, la parte principal de f en z_0 posee el coeficiente $b_m \neq 0$ y los siguientes coeficientes son cero. Los coeficientes anteriores a b_m no necesariamente son nulos, pero pueden serlo. Cuando $m = 1$, z_0 se denomina **polo simple**.

La definición anterior nos indica que para determinar si z_0 es un polo de $f(z)$, se debe observar el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de z_0 . Pero, este procedimiento no es práctico. Existen otros procedimientos más adecuados para verificar si un punto es o no un polo. El siguiente teorema nos muestra un procedimiento para verificar si un punto es un polo sin construir su serie Laurent.

Teorema 6.1 Si $f(z)$ tiene un polo en z_0 , entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Demostración. Sea $f(z)$ una función con un polo de orden m en z_0 . Luego el desarrollo (6.1) toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m},$$

donde $b_m \neq 0$. Multiplicando ambos lados por $(z-z_0)^m$ tenemos

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} + b_1 (z-z_0)^{m-1} + b_2 (z-z_0)^{m-2} + \dots + b_m.$$

Del resultado anterior tenemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)^m f(z)] = b_m.$$

Como $|(z-z_0)^m| \rightarrow 0$, cuando $z \rightarrow z_0$, la ecuación anterior indica que $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$. □

El teorema anterior no solo nos permite identificar si un punto es un polo, sino también el orden del mismo. Basándose en este teorema, las siguientes reglas nos permiten identificar el orden del polo.



Regla I Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$. Si existe el

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]$$

y si dicho límite no es cero ni infinito, entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 .

Regla II Si el polo de $f(z)$ en z_0 es de orden m , entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] = \begin{cases} 0 & n > m \\ \infty & n < m. \end{cases}$$

Ejemplo 6.3 Sea $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Probar que 0 y 1 son polos simples de $f(z)$.

Solución. Veamos que $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$ son polos de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{|z^2 - z|} \\ &= \frac{1}{|\lim_{z \rightarrow 0} (z^2 - z)|} \\ &= \frac{1}{0} = \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $z_1 = 0$ es un polo de $f(z)$. Por el mismo razonamiento se llega a que $z_2 = 1$ es un polo de $f(z)$. Veamos ahora de que orden son estos polos. Sea m un entero positivo. Así,

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^m f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^{m-1}}{z-1} = \begin{cases} 0 & m > 1 \\ 1 & m = 1 \\ \infty & m < 1, \end{cases}$$

lo cual implica que $z_1 = 0$ es un polo simple de $f(z)$. Por un razonamiento similar se llega a que $z_2 = 1$ es un polo simple de $f(z)$. \diamond

Es tan común encontrarse con problemas en los que se quiere determinar el orden de los polos de una función de la forma $f(z) = p(z)/q(z)$, que les dedicaremos una atención especial. El siguiente teorema nos permite identificar si un punto es un polo y, además su orden, para una función $f(z) = p(z)/q(z)$.

Teorema 6.2 Sea $z_0 \in \mathcal{C}$. Sea $f(z)$ una función tal que $f(z) = p(z)/q(z)$, donde $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en z_0 y $p(z_0) \neq 0$. Entonces, z_0 es un polo de orden m de f , si y sólo si,

$$q(z_0) = q'(z_0) = \dots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$$

y

$$q^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Demostración. Supongamos que $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = q'(z_0) = \dots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $q^{(m)}(z_0) \neq 0$. Si $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en z_0 con $p(z_0) \neq 0$ y $q(z_0) = 0$, entonces z_0 es un punto singular aislado de $f(z)$. Por otra parte, como $q(z)$ es analítica en z_0 y $q(z_0) = q'(z_0) = \dots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $q^{(m)}(z_0) \neq 0$, entonces el desarrollo de Taylor de $q(z)$ alrededor de z_0 es

$$q(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

luego,

$$\frac{q(z)}{(z - z_0)^m} = a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-m},$$

por tanto,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{q(z)}{(z - z_0)^m} = a_m \neq 0.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)] &= \left(\lim_{z \rightarrow z_0} p(z) \right) \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^m}{q(z)} \right) \\ &= \frac{p(z_0)}{a_m} \neq 0, \infty. \end{aligned}$$

Lo cual indica que z_0 es un polo de orden m de $f(z)$. □

Ejemplo 6.4 Verificar que todos los puntos singulares aislados de $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$ son polos simples.

Solución. Se tiene que

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

donde

$$p(z) = e^z \quad \text{y} \quad q(z) = \sin z.$$

Ahora, los puntos singulares aislados de $f(z)$ son

$$z_n = n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

De esta forma, $p(z_n) \neq 0$, $q(z_n) = 0$ y $q'(z_n) \neq 0$, para todo n . Por tanto, z_n es un polo simple de $f(z)$ para todo n . ◇

Definición 6.4 (Punto Singular Esencial) Sea z_0 un punto singular aislado de una función $f(z)$. Se dice que z_0 es un punto **singular esencial**, si la parte principal de f en z_0 tiene un número infinito de términos diferentes de cero.

De la definición de punto singular esencial, se deduce que z_0 es un punto singular esencial de $f(z)$, si y sólo si, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ no existe (ni finito ni infinito). De esta forma, para determinar si un punto singular aislado z_0 es o no un punto singular esencial de $f(z)$, no es necesario construir el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de z_0 .



Ejemplo 6.5 Demostrar que $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de $f(z) = e^{1/z}$.

Solución. El desarrollo de Laurent de $e^{1/z}$ alrededor de $z_0 = 0$ es

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} \text{ para todo } z \text{ tal que } |z| > 0.$$

Observamos que la parte principal posee infinitos coeficientes distintos de cero, por tanto, $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de $e^{1/z}$.

Otra manera de ver que $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de $e^{1/z}$, es probar que el $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z}$ no existe. Si nos acercamos al origen por la recta $y = 0$, $x > 0$, vemos que $f(z) = e^{1/x}$ crece sin límite cuando $x \rightarrow 0$. Pero si nos acercamos al origen por la recta $x = 0$, tenemos que $f(z) = e^{1/iy} = \cos(y^{-1}) - i\operatorname{sen}(y^{-1})$, que es un número complejo de módulo 1 para todo valor de y . Por lo tanto, el $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z}$ no existe. \diamond

Definición 6.5 (Punto Singular Removible) Sea z_0 un punto singular aislado de una función $f(z)$. Se dice que z_0 es un punto **singular removible**, si todos los coeficientes de la parte principal de f en z_0 son cero.

Si z_0 es un punto singular removible de $f(z)$, el desarrollo (6.1) toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

de donde se deduce que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0.$$

Por lo tanto, para determinar si un punto singular aislado z_0 es un punto singular removible de $f(z)$, basta con verificar que el $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe y es finito.

Ejemplo 6.6 Verificar que $z_0 = 0$ es un punto singular removible de $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$.

Solución. Se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1,$$

por tanto $z = 0$ es un punto singular removible de $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$. \diamond

6.2 Residuo

Definición 6.6 Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno cerrado simple C y en todo punto interior a C , salvo en z_0 . El **residuo** de $f(z)$ en z_0 , que se denota por $\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_0}$, está definido por

$$\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz.$$

El siguiente teorema describe la relación que existe entre $\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_0}$ y una serie de Laurent para $f(z)$.



Teorema 6.3 *El residuo de la función $f(z)$ en el punto singular aislado z_0 es igual al coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ en la serie de Laurent que representa a $f(z)$ en una región anular dada por*

$$0 < |z - z_0| < r,$$

para cierto número real $r > 0$.

Demostración. Debido a que z_0 es un punto singular aislado de $f(z)$, existe un número $r > 0$ tal que f es analítica en cada punto z tal que $0 < |z - z_0| < r$. En ese dominio la función f está representada por la serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

Sea C la circunferencia $|z - z_0| = R < r$. Así,

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z)]_{z=z_0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z - z_0)^n dz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz \right]. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Se tiene que

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}. \tag{6.4}$$

De las ecuaciones (6.3) y (6.4) se deduce que

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = b_1.$$

Con esto concluye la demostración del teorema. □

Ejemplo 6.7 *Calcular el residuo de $f(z) = e^{1/z}$ en $z = 0$.*

Solución. Se tiene que el desarrollo de Laurent de $f(z) = e^{1/z}$ alrededor de $z = 0$ es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n},$$

luego el residuo de $f(z)$ en $z = 0$ es

$$\text{Res}[f(z)]_{z=0} = 1. \tag{6.5}$$

◇

El siguiente teorema nos garantiza que si una función posee un número finito de puntos singulares en el interior de un contorno cerrado simple, éstos son aislados.

Teorema 6.4 *Si una función f tiene sólo un número finito de puntos singulares interiores a cierto contorno cerrado simple C , entonces éstos deben estar aislados.*



6.2.1 Cálculo del Residuo

Cuando una función $f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 su residuo es cero. Ahora, cuando una función $f(z)$ tiene una singularidad esencial en z_0 , la única manera que podemos determinar el residuo en dicho punto consiste en obtener el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 y elegir el coeficiente apropiado.

Pero si la función tiene un polo en z_0 no es necesario obtener todo el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 para encontrar el coeficiente que buscamos. Existen diversos métodos de los que podemos echar mano siempre y cuando sepamos que la singularidad es un polo.

Cálculo del Residuo en un Polo

El siguiente teorema nos permite identificar si un punto z_0 es un polo de $f(z)$ y, además, nos dice como calcular $\text{Res}[f(z)]_{z=z_0}$.

Teorema 6.5 Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Supongamos que para cierto entero positivo m , la función

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

se puede definir en z_0 de modo que sea analítica ahí y $\phi(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 . Su residuo ahí está dado por la fórmula

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}, \quad (6.5)$$

si $m > 1$, y por la fórmula

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z), \quad (6.6)$$

si $m = 1$.

Demostración. Sea $f(z)$ una función que tiene un polo de orden m en z_0 . Se define una nueva función $\phi(z)$ por medio de la ecuación

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z).$$

De la ecuación (6.2) se deduce que

$$\phi(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + b_{m-2}(z - z_0)^2 + \cdots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{m+n} \quad (6.7)$$

para todo $0 < |z - z_0| < r_1$, donde $b_m \neq 0$; por tanto, el punto z_0 es un punto singular removible de la función $\phi(z)$. Se escribe $\phi(z_0) = b_m$ para hacer la función $\phi(z)$ analítica en z_0 . Luego

$$\phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = b_m.$$

Puesto que este límite existe y $b_m \neq 0$, se deduce que $f(z)$ tiende a infinito cuando z se aproxima a z_0 .



La función $\phi(z)$ se puede utilizar por tanto, para determinar el residuo de $f(z)$ en el polo z_0 . Este residuo es el coeficiente b_1 en la serie de Laurent (6.2). Como en la expresión (6.7) es ahora la serie de Taylor para $\phi(z)$ alrededor de z_0 , el residuo de $f(z)$ en z_0 está dado por la fórmula

$$\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Cuando $m = 1$, esta expresión para el residuo de $f(z)$ en el polo simple z_0 se puede describir

$$\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z).$$

Se supone ahora que se proporciona simplemente una función $f(z)$ tal que el producto

$$(z - z_0)^m f(z)$$

se puede definir en z_0 de tal manera que ahí sea analítica. Como antes m es un número positivo. Se denota por $\phi(z)$ el producto anterior. Entonces, en algún disco abierto alrededor de z_0 ,

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z) = \phi(z_0) + \phi'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{\phi^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m + \cdots$$

Consecuentemente, en cada punto excepto z_0 en ese disco,

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \frac{1}{z - z_0} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m}.$$

Si $\phi(z_0) \neq 0$, se deduce que $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 cuyo residuo está dado por la ecuación (6.5) o (6.6). \square

Se nota que las condiciones del teorema se satisfacen siempre que $f(z)$ tenga la forma

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m},$$

donde la función $\phi(z)$ es analítica en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$.

Ejemplo 6.8 Hallar el residuo de $f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen} z}$ en cada uno de sus puntos singulares.

Solución. Los puntos singulares aislados de $f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen} z}$ son:

$$z_n = n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

además, cada z_n es un polo simple de $f(z)$. Definamos la función $\phi_n(z)$ como

$$\phi_n(z) = (z - z_n)f(z) = \frac{(z - z_n)e^z}{\operatorname{sen} z}, \quad z \neq z_n.$$



Se tiene que $\phi_n(z)$ es una función que puede definirse en cada z_n de modo que sea analítica y $\phi_n(z_n) \neq 0$. Ahora, el residuo de $f(z)$ en cada polo simple z_n es

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_n} &= \lim_{z \rightarrow z_n} \phi_n(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_n} \left[\frac{(z - z_n)e^z}{\operatorname{sen} z} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_n} \left[\frac{(z - z_n + 1)e^z}{\operatorname{cos} z} \right] \\ &= \frac{e^{n\pi}}{\operatorname{cos}(n\pi)} \\ &= (-1)^n e^{n\pi}. \end{aligned}$$

◇

6.2.2 Teorema de los Residuos

El siguiente teorema nos permite calcular la integral a lo largo de un contorno cerrado simple, de una función analítica en el contorno y en su interior, salvo para un número finito de puntos singulares interiores a él.

Teorema 6.6 (Teorema de los Residuos) *Sea C un contorno cerrado simple, dentro y sobre el cual una función f es analítica excepto para un número finito de puntos singulares z_1, z_2, \dots, z_n interiores a C . Entonces*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_1} + \operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_2} + \dots + \operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_n}).$$

Aplicación del Teorema de los Residuos

Se utilizará el Teorema de los residuos para calcular la integral de una función $f(z)$, a lo largo de un contorno que posee en su interior un número finito de puntos singulares de $f(z)$.

Ejemplo 6.9 *Calcular la integral*

$$\int_C \frac{z-2}{(z-1)z} dz,$$

donde C es la circunferencia $|z| = 3$ orientada positivamente.

Solución. Sea $f(z) = \frac{z-2}{(z-1)z}$. Los puntos singulares de f son $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$. Se observa que ambos son puntos interiores de C , además, z_1 y z_2 son polos simples de f . De esta forma,

$$\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_1} = 2$$

y

$$\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_2} = -1$$

Como z_1 y z_2 son puntos singulares aislados de f y f es una función analítica en C y en su interior, salvo en z_1 y z_2 , entonces por el Teorema de los Residuos

$$\begin{aligned} \int_C \frac{z-2}{(z-1)z} dz &= 2\pi i (\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_1} + \operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_2}) \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$



Ejemplo 6.10 Calcular la integral

$$\int_C (1 + z + z^2) \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz,$$

donde C es un contorno cerrado simple que contiene en su interior a los puntos 0, 1 y 2.

Solución. Sean $f_1(z)$, $f_2(z)$ y $f_3(z)$, funciones definidas respectivamente como

$$\begin{aligned} f_1(z) &= (1 + z + z^2)e^{1/z} \\ f_2(z) &= (1 + z + z^2)e^{1/z-1} \\ f_3(z) &= (1 + z + z^2)e^{1/z-2}, \end{aligned}$$

luego

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z).$$

Calculemos el residuo de $f(z)$ en $z = 0$. Se tiene que $f_2(z)$ y $f_3(z)$ son analíticas en $z = 0$, luego poseen desarrollo de Maclaurin. De esta forma, el residuo de $f(z)$ en $z = 0$ viene dado por el coeficiente de z^{-1} en el desarrollo de Laurent de $f_1(z)$ alrededor de $z = 0$,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= (1 + z + z^2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2-n}, \quad 0 < |z| < 1 \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\text{Res} [f(z)]_{z=0} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{10}{6}.$$

Calculemos el residuo de $f(z)$ en $z = 1$. Se tiene que $f_1(z)$ y $f_3(z)$ son analíticas en $z = 1$, por lo tanto poseen desarrollo de Taylor alrededor de $z = 1$. De esta forma, el residuo de $f(z)$ viene dado por el coeficiente de $(z - 1)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de $f_2(z)$ alrededor de $z = 1$,

$$\begin{aligned} f_2(z) &= (3 + 3(z - 1) + (z - 1)^2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - 1)^{-n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} (z - 1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} (z - 1)^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - 1)^{2-n}, \quad 0 < |z - 1| < 1 \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\text{Res} [f(z)]_{z=1} = 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{28}{6}.$$

Calculemos el residuo de $f(z)$ en $z = 2$. Se tiene que $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son analíticas en $z = 2$, por lo tanto poseen desarrollo de Taylor alrededor de $z = 2$. De esta forma, el residuo de $f(z)$



viene dado por el coeficiente de $(z - 2)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de $f_3(z)$ alrededor de $z = 2$,

$$f_3(z) = (7 + 5(z - 2) + (z - 2)^2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - 2)^{-n} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7}{n!} (z - 2)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{n!} (z - 2)^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - 2)^{2-n}, \quad 0 < |z - 2| < 1$$

de donde se deduce que

$$\text{Res} [f(z)]_{z=2} = 7 + \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = \frac{58}{6}.$$

En conclusión,

$$\int_C (1 + z + z^2) \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz = 2\pi i [\text{Res} [f(z)]_{z=0} + \text{Res} [f(z)]_{z=1} + \text{Res} [f(z)]_{z=2}]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{10}{6} + \frac{28}{6} + \frac{58}{6} \right] = 32\pi i.$$

◇

6.3 Expansión en fracciones parciales

Otra aplicación de gran importancia del cálculo de residuos, es la expansión en fracciones parciales de algunas funciones racionales particulares. La expansión en fracciones parciales se aplica a funciones racionales propias; en otras palabras, a funciones del tipo

$$f(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M}{a_0 + a_1 z + \dots + z^N}, \quad (6.8)$$

donde $M < N$. La expansión en fracciones parciales consiste en expresar la función $f(z)$, dada en la ecuación (6.8), como una suma de fracciones simples. El siguiente teorema nos muestra explícitamente la forma de la expansión en fracciones parciales, dependiendo de la multiplicidad de los polos de $f(z)$.

Teorema 6.7 *Sea $f(z)$ una función racional propia dada por (6.8). Sean p_k los polos de $f(z)$ y r_k sus multiplicidades respectivas, para $k = 1, 2, \dots, T$, donde T es un entero positivo tal que $\sum_{k=1}^T r_k = N$. Entonces:*

(i) *Si todos los polos de $f(z)$ son simples, la expansión en fracciones parciales de $f(z)$ es:*

$$f(z) = \frac{A_1}{(z - p_1)} + \frac{A_2}{(z - p_2)} + \dots + \frac{A_N}{(z - p_N)}, \quad (6.9)$$

donde los números complejos A_k , denominados coeficientes, se calculan como

$$A_k = \text{Res} [f(z)]_{z=p_k} = [(z - p_k)f(z)]|_{z=p_k}, \quad (6.10)$$

para $k = 1, 2, \dots, N$.



(ii) Si todos los polos de $f(z)$ son simples, excepto el polo p_l que es de orden $r_l \geq 2$, la expansión en fracciones parciales de $f(z)$ es:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{A_1}{(z-p_1)} + \frac{A_2}{(z-p_2)} + \cdots + \frac{A_{l-1}}{(z-p_{l-1})} \\
 &+ \frac{A_{l,1}}{(z-p_l)} + \frac{A_{l,2}}{(z-p_l)^2} + \cdots + \frac{A_{l,r_l}}{(z-p_l)^{r_l}} \\
 &+ \frac{A_{l+1}}{(z-p_{l+1})} + \cdots + \frac{A_T}{(z-p_T)},
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

donde

$$A_k = \text{Res} [f(z)]_{z=p_k} = [(z-p_k)f(z)]|_{z=p_k}, \tag{6.12}$$

para $k = 1, 2, \dots, T$ y $k \neq l$; y

$$A_{l,k} = \left(\frac{1}{(r_l - k)!} \right) \frac{d^{(r_l - k)}}{dz^{(r_l - k)}} [(z-p_l)^{r_l} f(z)] \Big|_{z=p_l}, \tag{6.13}$$

para $k = 1, 2, \dots, r_l$.

