

# Tema 7. Mapeos Definidos por Funciones Elementales

Prof. William La Cruz Bastidas

21 de noviembre de 2002



## Tema 7

# Mapeos Definidos por Funciones Elementales

En este tema se mostrará como algunas regiones y curvas se mapean por medio de funciones analíticas elementales.

Una función  $f(z)$  de variable compleja definida en el plano complejo, la denominaremos *mapeo* o *transformación*. Denotaremos con  $w = f(z)$  la imagen de  $z$  bajo  $f$ . Para  $T$  un conjunto de números complejos, denotaremos con  $f(T)$  el transformado o la imagen de  $T$  bajo  $f$ . La imagen inversa de un punto  $w$  del rango de  $f$  es el conjunto de todos los puntos  $z$ , en el dominio de definición de  $f$ , que tienen a  $w$  como su imagen.

### 7.1 Mapeos lineales

#### 7.1.1 Mapeo $w = z + c$

El mapeo del plano  $z$  en el plano  $w$  definido por la ecuación

$$w = z + c, \tag{7.1}$$

donde  $c$  es una constante compleja, es una *traslación* hecha mediante el vector representado por  $c$ . Es decir, si

$$z = x + iy \quad \text{y} \quad c = c_1 + ic_2,$$

entonces la imagen de cualquier punto  $(x, y)$  en el plano  $z$  es el punto

$$w = (x + c_1) + i(y + c_2).$$

Por ser el mapeo (7.1) una traslación, conserva los ángulos entre curvas. En consecuencia, el mapeo (7.1) transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

**Ejemplo 7.1** Halle el transformado del triángulo con vértices  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$  y  $z_3 = 3 + i$ , bajo el mapeo  $w = z - i$ .

*Solución.* Sea  $f(z) = z - i$ . El transformado del triángulo dado es otro triángulo cuyos vértices son:

$$w_1 = f(z_1) = 1, \quad w_2 = f(z_2) = 2 + 2i, \quad w_3 = f(z_3) = 3.$$

◇

Es claro que el mapeo (7.1) es uno a uno o iyectivo, es decir, para cada  $w$  existe un único  $z$  tal que  $w = f(z) = z + c$ . Por lo tanto,  $f^{-1}(z) = z - c$ . El siguiente ejemplo muestra la forma como se encuentra el transformado de un conjunto bajo el mapeo (7.1) utilizando su función inversa.

**Ejemplo 7.2** Encuentre el transformado del triángulo con vértices  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$  y  $z_3 = 3 + i$ , bajo el mapeo  $w = z - i$  utilizando el mapeo inverso.

*Solución.* Sean  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$ . La inversa de  $f(z) = z - i$  es  $f^{-1}(z) = z + i$ . Por otra parte, el triángulo con su interior se expresa según el siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} -2x + y \leq -1 \\ 2x + y \leq 7 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Como  $z = f^{-1}(w)$ , entonces sustituyendo la expresión  $f^{-1}(w)$  en el sistema de inecuaciones anterior, obtendremos la descripción analítica del transformado del triángulo con su interior. De esta forma,

$$x + iy = f^{-1}(w) = u + i(v + 1)$$

de donde  $x = u$  y  $y = v + 1$ . Ahora, sustituyendo las expresiones de  $x$  e  $y$  en el sistema de inecuaciones anterior obtenemos

$$\begin{cases} -2u + (v + 1) \leq -1 \\ 2u + (v + 1) \leq 7 \\ v + 1 \geq 1 \end{cases}$$

operando

$$\begin{cases} -2u + v \leq -2 \\ 2u + v \leq 6 \\ v \geq 0 \end{cases}$$

que es el sistema de inecuaciones que describe el triángulo obtenido en el Ejemplo 7.1.  $\diamond$

### 7.1.2 Mapeo $w = bz$

El mapeo del plano  $z$  en el plano  $w$  definido por la ecuación

$$w = bz, \tag{7.2}$$

donde  $b$  es una constante compleja distinta de cero, es una *rotación* y una *expansión* ó *contracción*. Se obtiene fácilmente al utilizar las formas polares de  $b$  y  $z$ . Tomando  $b = le^{i\beta}$  y  $z = re^{i\theta}$ , entonces

$$w = (lr)e^{i(\beta+\theta)}.$$

El mapeo (7.2) transforma cualquier punto  $z$  diferente de cero con coordenadas polares  $(r, \theta)$  en el punto  $w$  distinto de cero cuyas coordenadas polares son  $(lr, \beta + \theta)$ . Efectivamente, el mapeo (7.2) es una rotación del vector, representado por  $z$ , alrededor del origen, en un ángulo  $\beta = \arg b$  y también es una expansión o contracción del vector por medio del factor  $l = |b|$ .

Por ser el mapeo (7.2) una rotación, conserva los ángulos entre curvas. En consecuencia, el mapeo (7.2) transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias. Además, es un mapeo uno a uno, luego si  $f(z) = bz$ , entonces el mapeo inverso es  $f^{-1}(z) = \frac{z}{b}$ .

**Ejemplo 7.3** Encuentre el transformado del paralelogramo y su interior cuyos vértices son:  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 2 + 2i$ ,  $z_3 = 4 + 2i$  y  $z_4 = 3 + i$ , bajo el mapeo  $w = \frac{i}{2}z$ .

*Solución.* Sea  $f(z) = \frac{z}{i}$ . El transformado del paralelogramo dado bajo el mapeo  $w = \frac{i}{2}z$ , es el paralelogramo con vértices:

$$w_1 = f(z_1) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \quad w_2 = f(z_2) = -1 + i,$$

$$w_3 = f(z_3) = -1 + 2i, \quad w_4 = f(z_4) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

◇

### 7.1.3 Mapeo $w = bz + c$

El mapeo del plano  $z$  en el plano  $w$  definido por la ecuación

$$w = bz + c, \tag{7.3}$$

donde  $b$  y  $c$  son constantes complejas, es una *rotación* y una *expansión* ó *contracción* seguida de una *traslación*.

**Ejemplo 7.4** Encuentre el transformado del paralelogramo y su interior cuyos vértices son:  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 2 + 2i$ ,  $z_3 = 4 + 2i$  y  $z_4 = 3 + i$ , bajo el mapeo

$$w = \frac{z}{i} + i.$$

*Solución.* Sea  $f(z) = \frac{z}{i} + i$ . El transformado del paralelogramo dado bajo el mapeo  $w = \frac{z}{i} + i$ , es el paralelogramo con vértices:

$$w_1 = f(z_1) = 1, \quad w_2 = f(z_2) = 2 - i,$$

$$w_3 = f(z_3) = 2 - 3i, \quad w_4 = f(z_4) = 1 - 2i.$$

◇

## 7.2 Mapeo $w = 1/z$

El mapeo del plano  $z$  en el plano  $w$  definido por la ecuación

$$w = \frac{1}{z}, \tag{7.4}$$

para todo  $z \neq 0$  establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de los planos  $z$  y  $w$ . Por lo tanto, el mapeo inverso de  $f(z) = 1/z$  es  $f^{-1}(z) = 1/z$ , es decir, el mismo.

El mapeo (7.4) también puede escribirse como

$$w = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

para todo  $z \neq 0$ , luego se puede escribir como una composición de funciones o, equivalentemente, por transformaciones sucesivas

$$z^* = \frac{1}{|z|^2}z, \quad w = \bar{z}^*.$$

la primera de estas transformaciones se denomina *inversión* con respecto a la circunferencia  $|z| = 1$ . Es decir, la imagen de un punto  $z \neq 0$  es el punto  $z^*$  con las propiedades

$$|z^*| = \frac{1}{|z|}$$

y

$$\arg z^* = \arg z.$$

En otras palabras, los puntos exteriores a la circunferencia  $|z| = 1$  se transforman en los puntos diferentes de cero interiores a la misma y recíprocamente. Cualquier punto sobre la circunferencia se transforma sobre sí mismo.

La segunda transformación  $w = \bar{z}$  es, simplemente, una reflexión con respecto al eje real.

**Ejemplo 7.5** Encuentre el transformado del paralelogramo y su interior cuyos vértices son:  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 2 + 2i$ ,  $z_3 = 4 + 2i$  y  $z_4 = 3 + i$ , bajo el mapeo  $w = 1/z$ .

*Solución.* Sean  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$ . La inversa de  $f(z) = 1/z$  es  $f^{-1}(z) = 1/z$ . Por otra parte, el paralelogramo dado se expresa según el siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} 0 \leq x - y \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Como  $z = f^{-1}(w)$ , entonces sustituyendo la expresión  $f^{-1}(w)$  en el sistema de inecuaciones anterior, obtendremos la descripción analítica del transformado del conjunto dado. De esta forma,

$$x + iy = f^{-1}(w) = \frac{u}{u^2 + v^2} - \frac{v}{u^2 + v^2}i$$

de donde  $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$  y  $y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$ . Ahora, sustituyendo las expresiones de  $x$  e  $y$  en el sistema de inecuaciones anterior obtenemos:

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{u}{u^2 + v^2} + \frac{v}{u^2 + v^2} \leq 2 \\ 1 \leq \frac{-v}{u^2 + v^2} \leq 2 \end{cases}$$

operando

$$\begin{cases} u + v \geq 0 \\ (u - 1/4)^2 + (v - 1/4)^2 \geq 1/8 \\ u^2 + (v + 1/2)^2 \leq 1/4 \\ u^2 + (v + 1/4)^2 \geq 1/16 \end{cases}$$

que es el sistema de inecuaciones que describe el transformado del paralelogramo dado, bajo el mapeo  $w = 1/z$  y cuya gráfica se deja como ejercicio.  $\diamond$

**Transformación de rectas y circunferencias bajo el mapeo  $\frac{1}{z}$** 

Sean  $a, b, c$  y  $d$  números reales. La ecuación

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \quad (7.5)$$

determina una recta o una circunferencia, dependiendo de si  $a = 0$  ó  $a \neq 0$ , respectivamente, en el plano  $z$ .

Si  $z = x + iy$  es un punto que satisface la ecuación (7.5) para ciertos valores de  $a, b, c$  y  $d$ , entonces su transformado  $w = 1/z = u + iv$  satisface la ecuación

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0. \quad (7.6)$$

Consideremos algunos valores de  $a, b, c$  y  $d$ , que nos servirán como ejemplo para mostrar la utilidad de las ecuaciones (7.5) y (7.6) en la transformación de rectas y circunferencias bajo el mapeo  $w = 1/z$ .

- Si  $a \neq 0$  y  $d \neq 0$ , entonces la ecuación (7.5) determina *una circunferencia que no pasa por el origen* en el plano  $z$ . Según la ecuación (7.6), esta circunferencia se transforma, bajo  $w = 1/z$ , en *una circunferencia que no pasa por el origen* en el plano  $w$ .
- Si  $a \neq 0$  y  $d = 0$ , entonces la ecuación (7.5) determina *una circunferencia que pasa por el origen* en el plano  $z$ . Según la ecuación (7.6), esta circunferencia se transforma, bajo  $w = 1/z$ , en *una recta que no pasa por el origen* en el plano  $w$ .
- Si  $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$  y  $d \neq 0$ , entonces la ecuación (7.5) determina *una recta que no pasa por el origen* en el plano  $z$ . Según la ecuación (7.6), esta recta se transforma, bajo  $w = 1/z$ , en *una circunferencia que pasa por el origen* en el plano  $w$ .
- Si  $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$  y  $d = 0$ , entonces la ecuación (7.5) determina *una recta que pasa por el origen* en el plano  $z$ . Según la ecuación (7.6), esta recta se transforma, bajo  $w = 1/z$ , en *una recta que pasa por el origen* en el plano  $w$ .
- Si  $a = 0, b = 1, c = 0$  y  $d = -d_1$  ( $d_1 \neq 0$ ), entonces la ecuación (7.5) determina *la recta  $x = d_1$*  en el plano  $z$ . Según la ecuación (7.6), esta recta se transforma, bajo  $w = 1/z$ , en *la circunferencia*

$$u^2 + v^2 - \frac{u}{d_1} = 0$$

*que es tangente al eje  $v$  en el origen del plano  $w$ .*

- Si  $a = 0, b = 0, c = 1$  y  $d = -d_2$  ( $d_2 \neq 0$ ), entonces la ecuación (7.5) determina *la recta  $y = d_2$*  en el plano  $z$ . Según la ecuación (7.6), esta recta se transforma, bajo  $w = 1/z$ , en *la circunferencia*

$$u^2 + v^2 + \frac{v}{d_2} = 0$$

*que es tangente al eje  $u$  en el origen del plano  $w$ .*

**Ejemplo 7.6** Encuentre el transformado del paralelogramo y su interior cuyos vértices son:  $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = 4 + 2i$  y  $z_4 = 3 + i$ , bajo el mapeo  $w = 1/z$  utilizando las ecuaciones (7.5) y (7.6).



*Solución.* Sean  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$ , tales que  $w = 1/z$ . La frontera del paralelogramo dado viene dada por las siguientes rectas:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \\ y = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Utilizando las ecuaciones (7.5) y (7.6), los transformados de estas rectas bajo  $w = 1/z$  son, respectivamente:

$$\begin{cases} u + v = 0 \\ -2(u^2 + v^2) + u + v = 0 \\ -(u^2 + v^2) - v = 0 \\ -2(u^2 + v^2) - v = 0 \end{cases}$$

operando

$$\begin{cases} u + v = 0 \\ (u - 1/4)^2 + (v - 1/4)^2 = \frac{1}{8} \\ u^2 + (v + 1/2)^2 = \frac{1}{4} \\ u^2 + (v + 1/4)^2 = \frac{1}{16}. \end{cases}$$

De donde se deduce que el transformado del paralelogramo dado viene dado por el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} u + v \geq 0 \\ (u - 1/4)^2 + (v - 1/4)^2 \geq 1/8 \\ u^2 + (v + 1/2)^2 \leq 1/4 \\ u^2 + (v + 1/4)^2 \geq 1/16. \end{cases}$$

◇

### 7.3 Mapeos lineales fraccionarios

El mapeo del plano  $z$  en el plano  $w$  definido por la ecuación

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (7.7)$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son constantes complejas tales que  $ad - bc \neq 0$ , se denomina *transformación lineal fraccionaria* o *transformación de Möbius*. La condición  $ad - bc \neq 0$  impide que la derivada de  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ,

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

se anule, ya que de otra manera la función es constante. Se puede despejar a  $z$  de (7.7) para obtener

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a},$$

y como  $f(-d/c) = \infty$  y  $f(\infty) = a/c$ , se sigue que  $f(z)$  mapea todo el plano complejo extendido (plano complejo más el punto del infinito) de manera uno a uno en sí mismo.

Cuando  $c = 0$ , el mapeo (7.7) no es más que una transformación lineal. Cuando  $c \neq 0$ , la ecuación (7.7) se puede escribir como

$$w = \frac{a}{c} + \left( \frac{bc - ad}{c} \right) \frac{1}{cz + d}. \tag{7.8}$$

Veamos en qué se transforman las circunferencias y las rectas bajo una transformación de Möbius. Consideremos dos casos: (i)  $c = 0$  y (ii)  $c \neq 0$ .

(i) Si  $c = 0$ , entonces, según la ecuación (7.7),

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

lo cual indica que la transformación de Möbius es una transformación lineal que mapea circunferencias en circunferencias y rectas en rectas.

(ii) Si  $c \neq 0$  y  $ad - bc \neq 0$ , entonces, según la ecuación (7.8), la transformación de Möbius se puede expresar como

$$w = \frac{a}{c} + \left( \frac{bc - ad}{c} \right) \frac{1}{cz + d},$$

luego este mapeo se obtiene como las transformaciones sucesivas

$$Z = cz + d, \quad W = \frac{1}{Z}, \quad w = \frac{a}{b} + \left( \frac{bc - ad}{c} \right) W.$$

Entonces, una transformación de Möbius mapea circunferencias en circunferencias o rectas y rectas en rectas o circunferencias, dependiendo de la naturaleza de las mismas.

**Ejemplo 7.7** Encuentre el transformado, bajo el mapeo  $w = \frac{z - i}{z + i}$ , del conjunto  $D$  dado por los siguientes sistemas de inecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 5 \\ y \geq 1 \\ y \leq 2 \\ -x + y \geq -3 \end{array} \right. \tag{7.9}$$



y

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 5 \\ y \geq 0 \\ y < 1 \\ x + y \leq 5. \end{array} \right. \quad (7.10)$$

*Solución.* Sean  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$ . La inversa de

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

es:

$$f^{-1}(z) = \frac{-iz - i}{z - 1}.$$

Como  $z = f^{-1}(w)$ , entonces sustituyendo la expresión  $f^{-1}(w)$  en los sistemas (7.9) y (7.10), obtendremos la descripción analítica de  $f(D)$ . De esta forma,

$$x + iy = f^{-1}(w) = \frac{-iw - i}{w - 1} = \frac{-i(u + iv) - i}{u + iv - 1} = \left( \frac{-2v}{(u - 1)^2 + v^2} \right) + i \left( \frac{-u^2 - v^2 + 1}{(u - 1)^2 + v^2} \right)$$

de donde

$$x = \frac{-2v}{(u - 1)^2 + v^2}$$

y

$$y = \frac{-u^2 - v^2 + 1}{(u - 1)^2 + v^2}.$$

Ahora, sustituyendo las expresiones de  $x$  e  $y$  en los sistemas (7.9) y (7.10) obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-2v}{(u - 1)^2 + v^2} \geq 2 \\ \frac{-2v}{(u - 1)^2 + v^2} \leq 5 \\ \frac{-u^2 - v^2 + 1}{(u - 1)^2 + v^2} \geq 1 \\ \frac{-u^2 - v^2 + 1}{(u - 1)^2 + v^2} \leq 2 \\ \frac{2v}{(u - 1)^2 + v^2} + \frac{-u^2 - v^2 + 1}{(u - 1)^2 + v^2} \geq -3 \end{array} \right.$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-2v}{(u - 1)^2 + v^2} \geq 2 \\ \frac{-2v}{(u - 1)^2 + v^2} \leq 5 \\ \frac{-u^2 - v^2 + 1}{(u - 1)^2 + v^2} \geq 0 \\ \frac{-u^2 - v^2 + 1}{(u - 1)^2 + v^2} < 1 \\ \frac{-2v}{(u - 1)^2 + v^2} + \frac{-u^2 - v^2 + 1}{(u - 1)^2 + v^2} \leq 5, \end{array} \right.$$



operando

$$\left\{ \begin{array}{l} (u-1)^2 + (v-1/2)^2 \leq 1/4 \\ (u-1)^2 + (v+1/5)^2 \geq 1/25 \\ (u-1/2)^2 + v^2 \leq 1/4 \\ (u-2/3)^2 + v^2 \geq 1/9 \\ (u-3/2)^2 + (v+1/2)^2 \geq 1/2 \end{array} \right.$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} (u-1)^2 + (v-1/2)^2 \leq 1/4 \\ (u-1)^2 + (v+1/5)^2 \geq 1/25 \\ u^2 + v^2 \leq 1 \\ (u-1/2)^2 + v^2 > 1/4 \\ (u-5/6)^2 + (v+1/6)^2 \geq 1/18 \end{array} \right.$$

que son los sistemas de inecuaciones que describen  $f(D)$ . La gráfica de  $f(D)$  se deja como ejercicio.  $\square$

Existe solamente una transformación de Möbius que mapea tres puntos distintos dados  $z_1, z_2$  y  $z_3$  sobre tres puntos distintos especificados  $w_1, w_2$  y  $w_3$ , respectivamente. En efecto, la ecuación

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \quad (7.11)$$

define tal transformación.

**Ejemplo 7.8** *Determinar la transformación de Möbius que mapea  $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = -1$  en  $w_1 = i, w_2 = 0, w_3 = 1$ , respectivamente.*

*Solución.* Sustituyendo los valores de  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2$  y  $w_3$  en la ecuación (7.11)

$$\frac{(w-i)(0-1)}{(w-1)(0-i)} = \frac{(z-1)(0-(-1))}{(z-(-1))(0-1)},$$

operando

$$\frac{iw+1}{w-1} = \frac{z-1}{z+1},$$

despejando  $w$  obtenemos

$$w = \frac{-2z}{(i-1)z + (i+1)},$$

que es efectivamente la transformación de Möbius buscada.  $\diamond$