Tema 8. Introducción a las Señales

Prof. William La Cruz Bastidas

28 de junio de 2002

Tema 8

Introducción a las Señales

8.1 Funciones Generalizadas

8.1.1 Ampliación del concepto de función

En diferentes cuestiones del Análisis resulta necesario interpretar el término función con diferente grado de generalidad. A veces se consideran funciones continuas, en otros casos es preciso suponer que se trata de funciones diferenciables una o varias veces, etc. Sin embargo, en muchos casos el concepto clásico de función resulta insufiente, aun cuando sea interpretado en el sentido más general, esto es, como una regla cualquiera que a todo valor x del dominio de definición de esta función pone en correspondencia un número $y = f(x)$. He aquí dos ejemplos importantes.

1. Es cómodo determinar la distribución de masas a lo largo de una recta mediante la densidad de esta distribución. Sin embargo, si la recta tiene puntos que llevan masas positivas, está claro que la densidad de esta distribución no se puede describir de antemano con ninguna función corriente.

2. Aplicando el aparato del Análisis Matemático a unos u otros problemas, tropezamos con situacionbes, cuando no se pueden efectuar unos u otras operaciones del Análisis; por ejemplo, una función que no tenga derivada (en varios o incluso en todos los puntos) no se puede derivar, si por derivada se entiende una función corriente. Claro está que las dificultades de este orden se podrían evitar limitñadose a considerar solamente funciones, digamos, analíticas. Sin embargo, tal restricción del conjunto de funciones admisibles no es, en muchos casos, deseable.

Para establecer una teoría formal de las funciones generalizadas es necesario contar con herramientos del Análisis Funcional, las cuales no están al alcance de este curso. Concretamente, estudiaremos la función δ que con mucha frecuencia se utitiliza para generalizar funciones.

8.1.2 Función δ

Denotaremos con K al conjunto de funciones $\varphi : \Re \to \Re$ continuas. La función δ, denota con $\delta(t)$, se define como aquella función que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(0), \tag{8.1}$$

para toda $\varphi \in K$ y, además, $\delta(t) = 0$ para todo $t \neq 0$ y $\delta(t)$ se convierte en infinito en el punto $t = 0$. Si consideramos $\varphi(t) = 1$, de la ecuación (8.1) se deduce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1. \tag{8.2}$$

Enumeremos algunas otras propiedades de la función δ que se deducen fácilmente de su definición.

1. $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\, dt = 1$, para todo $\varepsilon > 0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)\, dt = \varphi(a)$, para toda $\varphi \in K$ y toda $a \in \Re$.

Obtención de funciones generalizadas a través de la función δ

En sí, la función δ es una función generalizada ya que estamos suponiendo que ella existe en $t = 0$. Por ello, toda función que involucre la función δ se considerará una función generalizada; por ejemplo,

$$f(t) = \begin{cases} \delta(t), & t = 0 \\ t, & t > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta es una manera directa de obtener funciones generalizadas empleando la función δ, pero también se utiliza la δ para definir las derivadas de funciones en puntos donde éstas no son derivables. Sea $f(t)$ una función que en los puntos $t_1, t_2, t_3, \ldots$ tiene saltos iguales a $h_1, h_2, h_3, \ldots$ respectivamente y es diferenciable en los demás puntos, su derivada representa la suma de la derivada corriente f' (en los puntos donde ésta existe) más la suma de tipo

$$\sum_k h_k \delta(t - t_k).$$

El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento.

Ejemplo 8.1 *Sea $f(t)$ definda como*

$$f(t) = \begin{cases} -2, & t \leq -2 \\ t, & -2 < t < 2 \\ 2, & 2 < t < 3 \\ 1, & t \geq 3. \end{cases}$$

Encontrar explícitamente $f'(t)$.

Solución. Los puntos donde $f(t)$ no posee derivada, en forma ordinaria, son: -2, 2 y 3. De esta forma, la derivada de $f(t)$, vista como una función generalizada, es

$$f'(t) = \varphi(t) - 2\delta(t+2) + 2\delta(t-2) + \delta(t-3),$$

donde

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & -2 < t < 2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

8.2 Señales

Definición 8.1 (Señal) *Una señal es una función que representa la variación en el tiempo de alguna variable física.*

Definición 8.2 *La función que se elige para describir una señal es llamada representación de la señal. El proceso de construir una representación de la señal se llama modelado de la señal. La representación de la señal se llama también el modelo de la señal.*

Definición 8.3 (Señal continua) *Una señal que depende de una variable real t y que modela una variable física que se desarrolla en el tiempo real se llama señal continua. La señales continuas son denotadas por una función con la varibale real t como argumento como en: $x(t)$.*

Definición 8.4 (Señal discreta) *Una señal que depende de una variable discreta n y que modela una variable física que se desarrolla en el tiempo discreto se llama señal discreta. La señales discretas se denotan por una función con un entero n como argumento como en: $x(n)$.*

8.2.1 Señales de uso común

Seguidamente se expondrán las señales que se emplean con mayor regularidad.

Impulso unitario continuo y discreto

El impulso unitario discreto, denotado por $\delta(n)$, se define como

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

El impulso unitario continuo, denotado por $\delta(t)$, es la función δ definida por (8.1).

Escalón unitario continuo y discreto

El escalón unitario discreto, denotado por $u(n)$, se define como

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

El escalón unitario continuo, denotado por $u(t)$, se define como

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

De las propiedades de las funciones generalizadas se deduce que

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \tag{8.3}$$

y

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau. \tag{8.4}$$

Pulso rectangular

La señal pulso rectangular, denotada por $p_T(t)$, se define, para $T > 0$, como

$$p_T(t) = \begin{cases} 1, & -T < t < T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Pulso triangular

La señal pulso triangular, denotada por $q_T(t)$, se define, para $T > 0$, como

$$q_T(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{T} + 1, & -T < t \leq 0 \\ 1 - \dfrac{t}{T}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Función signo

La función signo, denotada por $\mathrm{sgn}\,(t)$, se define como

$$\mathrm{sgn}\,(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Pulso exponencial

La señal pulso exponencial, denotada por $\mathrm{Exp}\,(t)$, se define como

$$\mathrm{Exp}\,(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

donde $A > 0$ y $\alpha > 0$.

8.2.2 Escalamiento de tiempo y desplazamiento en el tiempo

Todos los conceptos que a continuación daremos se expondrán para señales continuas. Estos conceptos se extienden sin ningún cambio para señales discretas.

Definición 8.5 *Dada la señal $x(t)$, la señal $\hat{x}(t) = x(\varepsilon t)$ se dice que está escalada en el tiempo. Si $\varepsilon < 0$, la escalada de tiempo, en este caso, se denomina inversión en tiempo.*

Ejemplo 8.2 *Consideremos el escalón unitario $u(t)$. Sea $x(t) = u(-t)$. Vemos que $x(t)$ es la inversión en tiempo de $u(t)$,*

$$x(t) = u(-t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

Definición 8.6 *Dada la señal $x(t)$, decimos que la señal $\hat{x}(t) = x(t-b)$ es la versión desplazada en tiempo de $x(t)$ ó, simplemente, $x(t)$ desplazada en tiempo. Si $b > 0$, decimos que el desplazamiento en tiempo es un desplazamiento hacia la derecha. Si $b < 0$, decimos que el desplazamiento en tiempo es hacia la izquierda.*

Ejemplo 8.3 *Consideremos el pulso rectangular $p_5(t)$. Sea $x(t) = p_5(t+1)$. Vemos que $x(t)$ es $p_5(t)$ desplazado una unidad hacia la izquierda,*

$$x(t) = p_5(t+1) = \begin{cases} 1, & -6 < t < 4 \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

8.3 Convolución de señales

En esta sección introduciremos el concepto de convolución. Definiremos convolución como una operación que envuelven dos señales arbitrarias

Definición 8.7 (Convolución de señales discretas) *Sean $h(n)$ y $x(n)$ dos señales discretas. La convolución entre $x(n)$ y $h(n)$, denotada por $x(n) * h(n)$, es una señal definida como:*

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k). \tag{8.5}$$

El siguiente ejemplo ilustra la definición de convolución de señales discretas.

Ejemplo 8.4 *Sean $x(n) = (1/2)^n u(n) + 2^n u(-n)$ y $h(n) = u(n)$. Calcular $y(n) = x(n) * h(n)$.*

Solución. Según la definición de $x(n) * h(n)$ y de la definición del escalón unitario, se tiene que

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big[(1/2)^k u(k) + 2^k u(-k)\Big] u(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1/2)^k u(k)u(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k u(-k)u(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k u(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k u(n-k). \end{aligned} \tag{8.6}$$

Para cada n, la ecuación (8.6) tiene un valor (si existe). Veamos que valor alcanza $y(n)$ para $n < 0$. Supongamos que $n < 0$, así de (8.6) y de la definición del escalón unitario se tiene

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} 2^k = \sum_{k=-n}^{\infty} (1/2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k - \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1}\right] \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}}{1-\frac{1}{2}} = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Para $n = 0$,

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k u(-k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k = 2.$$

Para $n > 0$,

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{n} (1/2)^k + \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (1/2)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k \\ &= 4 - 2^{-n}. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$y(n) = \begin{cases} 2^{n+1}, & n \leq 0 \\ 4 - 2^{-n}, & n > 0 \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$y(n) = 2^{n+1} u(-n) + (4 - 2^{-n}) u(n-1).$$

Definición 8.8 (Convolución de señales continuas) *Sean $h(t)$ y $x(t)$ dos señales continuas. La convolución entre $x(t)$ y $h(t)$, denotada por $x(t) * h(t)$, es una señal definida como:*

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau)\, d\tau. \tag{8.7}$$

El siguiente ejemplo ilustra la definición de convolución de señales continuas, además, demuestra que la convolución no es, en general, conmutativa.

Ejemplo 8.5 *Sean $x(t) = u(t) - u(t-1)$ y $h(t) = u(-t) - u(-t-1)$. Calcular $y(t) = x(t) * h(t)$ y $y_1(t) = h(t) * x(t)$.*

Solución. Calculemos primero $y(t)$. De (8.7) y de la definición del escalón unitario se tiene que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau - 1)]\, h(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t-\tau)\, d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-1) h(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} h(t-\tau)\, d\tau - \int_{1}^{\infty} h(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{0}^{1} h(t-\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Por otra parte, $h(t) \neq 0$ sólamente para $-1 < t \leq 0$, luego $h(t - \tau) \neq 0$ para $t \leq \tau < 1 + t$ y t fijo. De esta forma, si $t \leq -1$ entonces $h(t - \tau) = 1$ para $t \leq \tau < 0$, luego por (8.8) se tiene que

$y(t) = 0$. Para $-1 < t \leq 0$, $h(t-\tau) = 1$ si $t \leq \tau < 1+t$ con $0 < 1+t < 1$, luego por (8.8) se tiene que

$$y(t) = \int_0^{1+t} d\tau = 1 + t.$$

Para $0 < t \leq 1$, $h(t-\tau) = 1$ si $t \leq \tau < 1+t$ con $1 < 1+t \leq 2$, luego por (8.8) se tiene que

$$y(t) = \int_t^1 d\tau = 1 - t.$$

Para $t > 1$, $h(t-\tau) = 1$ si $t \leq \tau < 1+t$ con $1+t > 2$, luego por (8.8) se tiene que $y(t) = 0$. Por lo tanto,

$$y(t) = \begin{cases} 1+t, & -1 < t \leq 0 \\ 1-t, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{en otro lugar.} \end{cases}$$

Se deja al lector verificar que $y_1(t) = h(t) * x(t)$ es:

$$y_1(t) = \begin{cases} 2+t, & -2 < t \leq -1 \\ -t, & -1 < t \leq 0 \\ 0, & \text{en otro lugar.} \end{cases}$$

con lo cual se demuestra que la convolución no es conmutativa para señales arbitarias.